鳴門教育大学研究紀要
(教育科学編)
第18巻　2003

2次関数の最大・最小におけるつまずきの分析および指導

──OHPシートを利用した個別指導の実践を通して──

丸　林　英　俊*，　川　上　雅　子**

(キーワード：2次関数，最大・最小，つまずき，教材・教具)

1．はじめに

日頃の実践の中で，高等学校（普通科）に入学して間もない生徒が，「わからない」，「むずかしい」というのがこの2次関数の最大・最小の特に文字を含む問題についてである。近年，数学ぎらいが叫ばれているが，この問題を理解できるかできないかが，彼らにとって高校3年間の数学が好きになれるかどうかを決定する重要な問題であると考える。実際，『「2次関数」の指導上の問題点』の中で，高校1年で約1割の生徒たちが，数学ができなくなったと感じており，そのつまずき始めの教材が「関数」であることを指摘している（[3]）。

そこで，事前調査として下記のような2次関数の最大・最小の文字を含む2つの典型的な問題を解かせ，つまずきの分析を行った。その結果つまずきの主な原因が「区間の場合分けの複雑さ」と「関数と区間が同時に動いていると錯覚すること」にあることがわかった。

本論文では，「場合分け」の視点から生徒を3レベル：①全くわからない②最大・最小の一方がわかる③ほとんどわかる，に分類し2つの問題とも同じレベルに属する生徒を各1名，さらに2つの問題のレベルが異なる生徒の代表として1名，合計4名を選出した。そして，彼らに最大・最小の問題を解決させるため，基本的問題を繰り返し練習させる教材とOHPシートを利用した教具を開発し，個別指導を行った。ここでの個別指導の方法はBorasi（[1]）を参考にした。これらの教材・教具が2次関数の最大・最小の文字を含む問題を解決するのに有効かどうかを検証した。この論文は，（[2]）をまとめたものである。

2．事前調査

平成13年12月中旬　徳島県立J高等学校普通科1年生（40人）において，2次関数の最大・最小に関する問題についてテストを実施し，生徒の実態を把握した。

問題1－文字係数の2次関数の最大・最小の問題－

> 2次関数　$y = x^2 - 2ax$　（$0 \leqq x \leqq 2$）における
> 最大値 $M(a)$ と最小値 $m(a)$ を求めよ。
> また，そのときの x の値を求めよ。

問題2－区間に文字を含む2次関数の最大･最小の問題－

> 2次関数　$y = x^2 - 2x + 3$　（$t \leqq x \leqq t+2$）の
> 最大値と最小値を求めよ。

3．つまずきの分析

上記問題1，問題2は，「区間の場合分け」をみる問題である。したがって以下の表では，つまずきを分析するために「区間の場合分けに関するもの」と「その他」に分けてまとめた。

問題1におけるつまずき

①　区間の場合分けに関するもの

つ　ま　ず　き	人　数
(1)　全くわからない	
・2次関数のグラフがわかっていない	2
・平方完成とグラフまで	1
・不明	1
(2)　最大値・最小値を同時に求める場合	
・最大値のみに着目	1
・最小値のみに着目	7
(3)　最大値・最小値を分けて考える場合	
・最大値不十分	1
(4)　グラフと a の範囲が一致しない	1
(5)　x の値まで求める場合	
・$a = 0$，2のとき分けて考えた	2
・$a = 1$ のとき分けずに考えた	11
・$a = 0$，1，2を除いた	1
・$a \geqq 0$ の範囲だけ考えた	2
・x の値まで求めていない	1

*鳴門教育大学自然系（数学）教育講座
**鳴門教育大学大学院

② その他

つ ま ず き	人 数
(1) 計算ミス	2
(2) $a=1$ としながら x の値や最大値，最小値が文字のまま	5

問題2におけるつまずき

① 区間の場合分けに関するもの

つ ま ず き	人 数
(1) 全くわからない	
・2次関数のグラフがわかっていない	1
・不明	2
・無解答(分からない気持ちを答案に書いている)	1
(2) 最大値・最小値を同時に求める場合	
・最大値のみに着目	3
・最小値のみに着目	6
(3) グラフと t の範囲が一致しない	1
(4) x の値まで求める場合	
・$t=-1$，1のとき分けて考えた	1
・$t=0$ のとき分けずに考えた	8
・$t=-1$，0，1を除いた	1
・t の範囲不十分	3
・t の範囲簡単にせず	3
(5) x の値まで求めない場合	
・$t=0$ のとき分けて考えた	1

② その他

つ ま ず き	人 数
(1) ミス（計算ミス，符号ミスなど）	3
(2) $t=0$ としながら x の値や最大値，最小値が文字のまま	5

（問題1，2において一人の生徒が，複数のつまずきをしている場合もある。）

答案や表から次のことがいえる。

(1) 問題1，2においてそれぞれ「最大値と最小値を求めよ」という問いには，各区間での場合分けが正しいか正しくないかは別として，生徒のほとんどが各区間の中で同時に最大値と最小値を求めていた。実際，別々に分けて考えたのはわずかで，問題1で2人，問題2で1人であった。また，無解答は問題2の1人だけであった。

(2) 最大値と最小値を同時に求めるのに最小値だけを考えて区間を場合分けしている答案が非常に多かった。実際，一方しか考えずに場合分けしてつまずいた者のうち最小値で場合分けした者は，問題1では8人中7人，問題2では9人中6人であった。生徒にとっては最大値よりも最小値に着目した区間の場合分けが思考しやすいと考えられる。今回は問題1，2とも，問題の2次関数が下に凸ばかりであったので次回は上に凸の場合についても調査し，最大値に着目して場合分けする生徒が多いかどうかを検証したい。（表：問題1の①の(2)，問題2の①の(2)参照）

(3) 区間の場合分けに関するものの中で，t の範囲をできるだけ簡単な形にしていない解答もみられた。例えば，$-1<t<0$ を $t+1<1<t+2$ など図で表したままの状態になっているのが，問題2で3人いた。これは式を変形するのが面倒でそのままにしているのか，あるいは簡単に表すことができないのかは生徒により異なると考える。（表：問題2の①の(4)参照）

(4) 場合分けした区間の端点が，場合分けした区間のどちらに含まれるか，あるいは分けて考えなければならないかをきちんと場合分けできていない生徒も多かった。特に，成り立つときの，x の値まで求めるとき分けて考えなければならないところをまとめていた。この点については問題1では11人，問題2では8人と多い。また，端点をどのように判断してよいかわからないため，あえて場合分けの区間から除いたと考えられる答案もみられた。（表：問題1の①の(5)，問題2の①の(4)参照）

(5) 問題としてどこに文字がはいっているか（関数が文字係数か，あるいは区間が文字を含むか）の違いはあっても，各区間で同時に最大値と最小値を考える場合いずれも解答は，x の値まで求めるときは区間が5つに分かれ，x の値まで求めなければ4つに分かれる。別々に分けて最大値と最小値を考える場合，最大値は x の値まで求めるときは3つに分かれ，x の値まで求めないときは2つに分かれる。このときどちらの場合も最小値は3つに分かれたままで変わらない。（ただし，問題1，2の場合）一般に問題1，2とも同じ生徒では両問題に共通する解き方をしているため同様のつまずきが見られた。

(6) 各区間での最大値と最小値が正しいか正しくないかは別として，成り立つときの x の値まで求めていない生徒は，問題1では1人，問題2では3人であった。問題1で少ないのは問題に「x の値まで求めよ」とあるからだと考えられる。以前は問題に x のあるなしにかかわらず x の値まで求めるよう指導してきた。最近はなくてもまちがいではないということで，書かない生徒が増えた。しかし問題2では書くか書かないかで区間の場合分けが(5)で触れたように変わってくる。(4)とも関連するが，この点での生徒のつまずきは非常に多く，細かい指導が一層必要となるところである。（表：問題1の①の(5)，問題2の①の(4)，(5)参照）

(7) 場合分けには直接関係なく，答えとしてまちがいではないが，数学的に気になるところとしては，問題1において「最大値 $M(a)$ と最小値 $m(a)$ を求めよ」とあ

るのに $M(a)$ や $m(a)$ を使わずに最大値はとか，最小値は，などのように言葉で答えを書いている生徒が，10人もいたことである。これは慣れない文字に対する理解が不十分で，使用するのに抵抗があったためではないだろうか。実はこの問題の続きに，「$M(a)$，$m(a)$ のグラフをかけ」とあり，正確にグラフがかけたものは少なかった。調査テストに「$M(a)$ や $m(a)$ の意味がわからない」，「求めた最大値や最小値が一体何なのかわからない」と書いた生徒もいた。x と y を使って関数を表すことには慣れているが，x と $f(x)$ の関係以上に a と $M(a)$ あるいは a と $m(a)$ の関係は捉えにくいようである。

以上の分析結果から，つまずきのレベルを①区間の場合分けが全くわからない②最大・最小の一方の区間の場合分けがわかる③区間の場合分けは基本的にはわかっているが細かいミスをしている，の３段階に分けた。細かいミスには，区間の場合分けにおいて等号をつける位置の問題や，区間を表す不等式を簡単にしていないものなどがある。

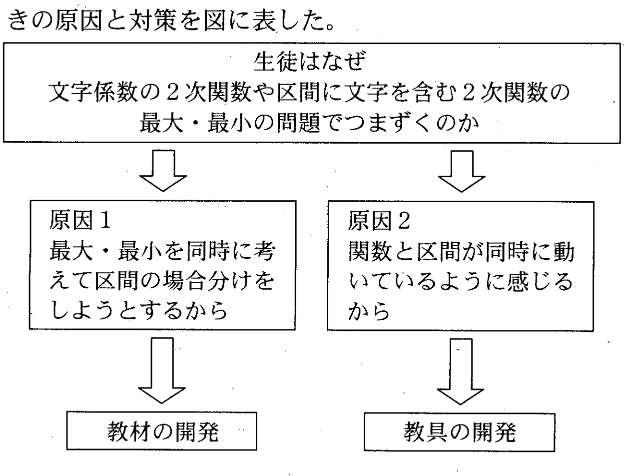
以下の表は問題1,2のつまずきがつまずきのレベルのどれにあたるかを場合分けしたものである。

つまずきのレベル	問題１	問題２
①区間の場合分けが全くわからない	①-(1)	①-(1)
②最大・最小の一方の区間の場合分けがわかる	①-(2) ①-(3)	①-(2)
③区間の場合分けは基本的にはわかっているが細かいミスをしている	①-(4) ①-(5)	①-(3) ①-(4) ①-(5)

こういった生徒に対して，実際にどのように指導すれば生徒のつまずきをなくすことができるか，次章で考察することにした。

4．指導法の考察

３章におけるつまずきの分析から下記のようにつまずきの原因と対策を図に表した。



次に具体的な教材・教具の開発について述べる。

(1) かわらばん教材の開発

“かわらばん”とは，平成10年度から日頃の教材として使用しているプリントのネーミングである。生徒に江戸時代の庶民の新聞のように数学のプリントに慣れ親しんでもらいたいという気持ちを込めて作成したもので，今回はそれを改良し使用した。改良点は２点ある。１点目は生徒にわかりやすく理解させるために，教材プリントで扱う関数や区間はできるだけシンプルなものを選び，文字のあるこの問題の本質が見やすい形にした。具体的には，２次関数の x^2 の係数は１または－１，そして区間も真ん中を考えるときに分数にならないようにするために幅２または４とした。２点目は，つまずきの最大の原因が各区間において「最大・最小の問題を同時に考えようとするところ」にあると考えた。これにより「場合分けが複雑」になり理解できない生徒が多いのだと考える。そこでかわらばんの各プリントでは，小問を３題つくり「(1)最大値(2)最小値(3)最大値と最小値を求めよ」という形にした。この小問(1)，(2)では「区間の場合分けの複雑さ」を解消するために最大値と最小値を別々に分けて一方だけ考えさせた。また，(3)では最大値と最小値を別々に考えた上で，解答の美しさの視点や同時に２つのことを考えられるという視点からも，あわせて考えられるようにした。

また，今回のかわらばん教材は，文字係数の２次関数の最大・最小に関する問題としてNo.１からNo.４までの４題，また区間に文字を含む２次関数の最大・最小の問題としてNo.５からNo.８の４題で構成されている。資料として各問題を簡単に表したものを最後のページに載せた。これは，紙面の関係で８枚のプリントを最後のページにまとめた。実際のかわらばんでは，各々の問題をＡ４サイズにプリントしている。

上記２点について考慮し，プリント教材かわらばんを作成した。

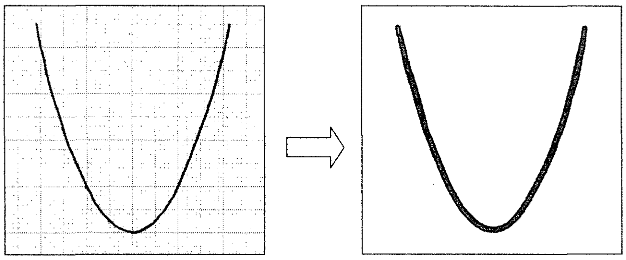
(2) ＯＨＰシートを利用した教具の開発

つまずきの２つ目の原因が「関数と区間が同時に動いていると錯覚すること」により起こると考え，問題の本質を見極めるため，視覚的に容易に捉えられるよう動くもの（関数と区間）を，ＯＨＰシートを用いて表すことにした。

まず，教具の開発その１－文字係数の２次関数の最大・最小の問題に関する教具－（関数を表すシート）は，材料としてＯＨＰシート，方眼紙，はさみ，油性マジック（黒）を用いた。作成の手順は次のとおりである。

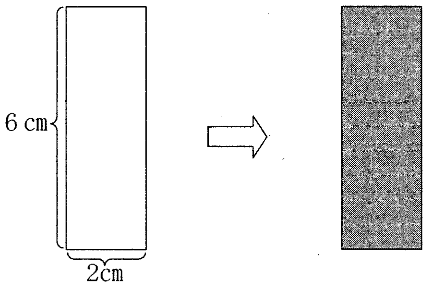
①方眼紙に関数 $y=x^2$ のグラフをかく。

②ＯＨＰシートに①のグラフを黒の油性マジックを使ってなぞる。
③このグラフがきちんとはいる大きさにシートを切る。



次に，教具の開発その２－区間に文字を含む２次関数の最大・最小の問題に関する教具－（区間を表すシート）を開発した。

材料として，ＯＨＰシート，はさみ，ものさし，油性マジック（赤）を用いた。作成の手順は，次のとおりである。
①ＯＨＰシートを６cm×２cmの長方形に切る。
②このシートを赤の油性マジックで塗る。



これらの教材・教具を実際に用いた個別指導の実践について詳述する。

５．個別指導について

３章で分類したように，事前調査のテストの分析結果から「場合分け」の視点で
①全くわからない
②最大・最小の一方がわかる
③ほとんどわかる
という３つのレベルに分けた。

問題１,２で同じレベルのまちがいをしている生徒を中心に，各レベルの代表として，Ａ子，Ｂ子，Ｃ夫の３人を，２つの問題の答えのレベルが異なる生徒の代表としてＤ子を取り上げ，３章で述べた教材と教具を使って個別指導を行った。Ｄ子は，問題１のレベルは③，問題２のレベルは①である。

(1) 個別指導の実際

全くわからない生徒　Ａ子の例

Ａ子の答案

問題１

$y=(x-a)^2-a^2$ 頂点$(a, -a^2)$	$x=0$のとき $y=0-0$ $=0$ $x=2$のとき $y=4-4a$	最大値 $M(a)$ $x=0$のとき 0 最小値 $m(a)$ $x=2$のとき $4-4a$

問題２

$x=t$のとき $y=t^2-2t+3$ $=(t-1)^2+2$	$x=t+2$のとき $y=(t+2)^2-2(t+2)+3$ $=t^2+4t+4-2t-4+3$ $=t^2+2t+3$ $=(t+1)^2+2$	最大値 t^2+2t+3 最小値 t^2-2t+3

問題１，問題２に共通していることは，２次関数の最大値と最小値を求めるのに１次関数のように捉えて区間の両端の値を代入して比較し，自分が大きいと思う方を最大値，小さいと思う方を最小値としている。また，両問題とも答案にグラフを全くかいていないところから，関数を幾何学的に捉えることをせずに問題を解こうとしている。そこで中学校の１次関数と簡単な２次関数のグラフをもとにした最大・最小の問題を解くことから復習することにした。

Ａ子の個別指導

①頭で考えるだけでなくグラフをかくことにより，関数の幾何学的イメージづくりができるように，１次関数と簡単な２次関数の最大値と最小値について下記の問題を解かせた。

次の関数において，$-1 \leqq x \leqq 2$のとき最大値・最小値を求めよ。

(1) $y=x+1$　(2) $y=ax$　(3) $y=x^2+1$　(4) $y=ax^2$

調査テストでの結果が信じられないほどすらすら解けた。Ａ子は、最大値と最小値について２次関数の場合，最大値は一番高いところ，最小値は一番低いところ，つまり，これらは区間の両端または頂点が候補になっていることに気づいた。また，(2)，(4)のaについても正，負の場合分けができグラフもきちんとかけた。

②次の４つの基本の２次関数について，頂点の座標，(1)のグラフとの位置関係について考えさせた。

(1) $y=ax^2$，(2) $y=a(x-p)^2$，(3) $y=ax^2+q$，
(4) $y=a(x-p)^2+q$

Ａ子は，(2)から(4)の頂点の座標について答えることができなかった。しかし，これらすべてのグラフの開き具

合は同じであることはわかっていた。

③文字係数の２次関数の最大・最小の問題について，教材であるかわらばんNo.１からNo.４と関数を表すシートを使用して指導した。その結果，Ａ子は下に凸のグラフでは最大値は区間の真ん中を基準に考え，最小値は区間に頂点が入っているかいないかで場合分けすればよいということに気づいた。また，グラフが上に凸，下に凸かで最大値，最小値の求め方が逆転していることにも気づいた。最後には，シートがなくても問題を解くことができるようになった。

④区間に文字を含む最大・最小の問題を解くために，教材No.５からNo.８のかわらばんと教具である区間を表すシート使用した。区間が動くということはどういうことかを，ビジュアルに理解させるため実際に自分でシートを動かすことで実験させた。また，シートの幅が２cmということの理由について（特に区間が４のとき，グラフの目もりを５mmにすることでこのシートが使えることを）考えさせた。③のときと同様に下に凸のグラフでは，最大値は区間の真ん中を基準に考え，最小値は区間に頂点が入っているかいないかで考えればよいということにＡ子は気づいた。また，この場合もグラフが上に凸，下に凸かで最大値や最小値の求め方が逆転していることに気づいた。そして，シートがなくても問題を解くことができるようになった。

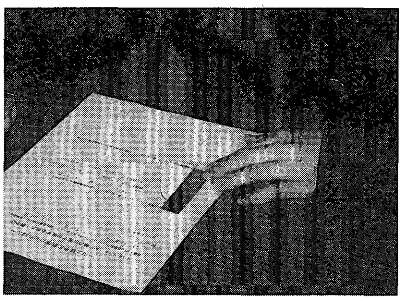


写真１　区間を表すシートを使用してかわらばんを解いているところ

⑤最後に②の指導時に４つの２次関数について理解が十分でなかったので，今度は具体的な４つの関数について考えさせた。問題は次の４つである。各問題について，グラフをかかせ，頂点の座標，軸，(1)のグラフとの位置関係を考えさせた。

(1) $y=x^2$，(2) $y=(x-1)^2$，(3) $y=(x-1)^2+3$，
(4) $y=x^2-1$

具体的な問題であったためか，②のときとは違ってスムーズに正確に全部解くことができた。そして，(1)，(2)，(3)，(4)のグラフは平行移動によりすべて重ねあわせることができることや関数を表すシートが一つである理由についても理解できた。

最大・最小の一方がわかる生徒　Ｂ子の例

Ｂ子の答案（最大のみの場合）

問題１

$y=(x-a)^2-a^2$

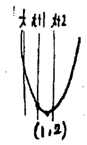
$a=1$のとき，Ｍは　0　($x=0, 2$のとき)
　　　　　　　ｍは　-1　($x=1$のとき)

$a<1$のとき，Ｍは　$-4a+4$　($x=2$のとき)
　　　　　　　ｍは　$-a^2$　($x=a$のとき)

$a>1$のとき，Ｍは　0　($x=0$のとき)
　　　　　　　ｍは　$-a^2$　($x=a$のとき)

問題２

$y=(x-1)^2+2$



$t+1=1$ すなわち，$t=0$のとき，最大値　t^2-2t+3　($x=t, t+2$のとき)
　　　　　　　　　　　　　　　　最小値　2　($x=1$のとき)

$t+1<1$ すなわち，$t<0$のとき，最大値　t^2-2t+3　($x=t$のとき)
　　　　　　　　　　　　　　　　最小値　t^2+2t+7　($x=t+2$のとき)

$t+1>1$ すなわち，$t>0$のとき，最大値　t^2+2t+7　($x=t+2$のとき)
　　　　　　　　　　　　　　　　最小値　t^2-2t+3　($x=t$のとき)

２つの答案に共通していることは，区間を最大値のみを基準にして場合分けし，各区間で同時に最大値と最小値を求めていて，最小値を基準にした場合分けをまったく考えていないことである。また，上のグラフには，一つの図の中に５つのグラフがかかれていているが答案での場合分けは３つになっている。生徒は，最大値と最小値の問題について５つの場合に分けなければならないことは，知っていると考えられる。実際に個別指導の中でインタビューしてみると関数と区間の位置関係については答案の図が示すように５つになることは，はっきりわかっていたが，「いざ場合分けしようとすると実際にどうしたらよいかわからない」といっていた。また，「最小値に着目して区間の場合分けをする生徒がほとんどであったのに，なぜＢ子は，最大値のみを意識して場合分けを考えたのか」と聞いてみると「区間のちょうど真ん中に頂点がくると両端が同じ値になる。この形が好きなのだ」と言っていた。これは，生徒は言葉ではうまく表現できなかったが，２次関数の軸を中心とした対称性の美しさに惹かれたのではないかと考える。

Ｂ子の個別指導

①上記２つの答案からこの分類だと最大値のみの場合分けしか考えていないことに気付かせた。

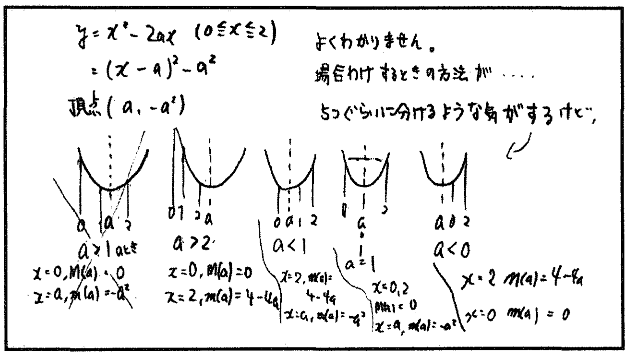
②また，一つの図の中に複数のグラフをかくと何がなんだかわからなくなるので，見やすくするために分けてかくように指導した。

③文字係数の２次関数の問題について最大値と最小値を

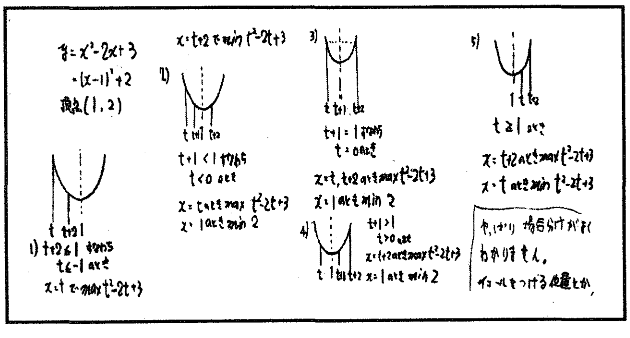
別々に考えさせるため，かわらばんNo.1からNo.4を使用した。さらに，最大値と最小値の区間の場合分けをそれぞれ数直線にあらわして一度にあわせて考えるには，どのような場合分けになるかを考えさせた。
④区間に文字を含む2次関数の問題について最大値と最小値を別々に考えさせるため，かわらばんNo.5からNo.8を使用し区間を表すシートも使用した。この場合も，最大値と最小値の場合分けを数直線にあらわして（③と同様）一度に考えるには，どのような場合分けになるかを考えさせた。
⑤最後にこれまでの学習が身についたかどうかをまとめの問題により確認した。

2回の個別指導が終わった後，インタビューの中でB子はこの2次関数の最大・最小の問題に対して，わかったことと自分なりの解法について述べた。
「まず，それぞれの問題に対する答えの書き方で，4つに場合分けする場合と5つに場合分けする場合の違いについてわかった。
次に，区間と2次関数のグラフの5つの位置関係はシートを左右に動かして説明できるが，最初から一度に場合分けするのは非常に難しい。そこで，最大値と最小値の場合分けのみをそれぞれだしておいて，その2つをあわせた範囲を場合分けし，その区間で最大値と最小値をそれぞれ求めたい」と言っていた。

ほとんど理解していると思われる生徒　C夫の例
C夫の答案
問題1



問題2



問題1，2とも答案にあるグラフには1＜a＜2としながらも，1＜aとしているようなまちがいが，2カ所ずつ見られる。また，問題2ではt＝0のとき具体的な値を代入せずに文字のままになっている。図としては，関数のグラフと区間の位置関係をきちんとかくことができているにもかかわらず，式として場合分けができていないのはなぜか。生徒にインタビューしてみると「塾で習った方法をただ何となく使っただけではっきりと，わからない」といっていた。答案の両方に見られるように場合分けに関して不安な気持ちがよくあらわれている。そこで次のような個別指導を行った。

C夫の個別指導
①答案としてはほぼできている生徒なので，まずは一人でかわらばんNo.1の問題を解かせた。
②このかわらばんの問題を解いた後で，「何となく自信がない，塾で習った方法をただ何となくやってきた，だから何を基準にして場合分けを考えたらよいのかわからない」ということだった。そこで「初めから教えてほしい」ということになり，かわらばんと区間を表すシート，関数を表すシートを使って指導した。
③ある程度わかっている生徒だったので，短時間のうちにかわらばんの問題が解けた。

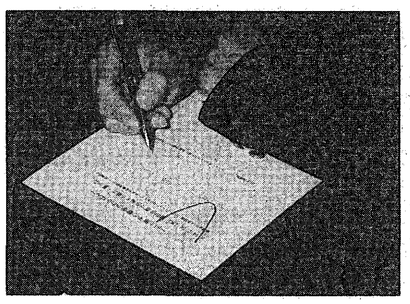
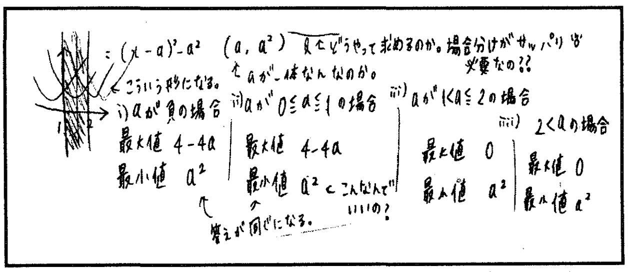


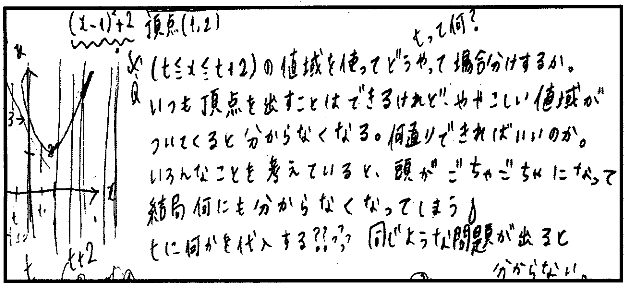
写真2　関数を表すシートを使用してかわらばんを解いているところ

④かわらばんについては，基本的な問題しか練習しないため，シートがないと解けないというのでは困るので，シートなしで類似問題を解かせ，理解できたかどうかを確認した。

問題1，2の答えのレベルが異なる生徒　D子の例
D子の答案
問題1（レベル③）



問題２（レベル①）



問題１については，ほとんどできている。成り立つときのxの値まで求める必要がなければ，区間の場合分けはこれでよいが，ここでは求めなければならないので$a=1$のときは分けて書く必要がある。問題２については頂点から先に進むことができない全くわからない状態を素直に書いている。そこで次のように指導した。

Ｄ子の個別指導

Ｄ子の場合は両方わからないわけではないが，問題２の問題を中心に他の生徒と同じように，かわらばんNo.１からNo.８まで，区間を表すシートと関数を表すシートの両方を使用し，問題解決させた。最後に類似問題を解かせ，できるようになったかを確認した。

以上４名の生徒の個別指導を平成14年１月から２月にかけて１人につき２回，合計２時間から２時間半程度行った。かわらばん（教材）の指導の順は生徒の実態に合わせて変えた。平成13年12月の調査テストで特に理解のレベルの低かったＡ子に対しては，教師の指導のレベルを最初から最大値と最小値を別々に分けて考えるところまでにとどめた。他の生徒については，最大値と最小値をあわせて考えさせるところまで指導した。したがって生徒がわかったことでは，Ａ子がわかったことに加えて，他の生徒については関数が動いて区間が動く場合も，区間が動いて関数が動く場合も同じであることに気づき，関数と区間の位置関係が５つになることがわかった。

6. 生徒の感想

全個別指導が終了してから生徒に感想を書かせた。以下の感想は原文のままである。

教材プリントの構成の仕方，使用の順序について

・とてもわかりやすかった。
・数学が好きになれました。
・問題が少ないので集中力が切れなくてすむ。
・少しわかるようになった。
・上級編として，難しい問題を用意しておいて簡単な問題を理解した後ですぐにやってみる。

関数のシート，区間を表すシートの作成および利用について

・グラフが見やすくなった。
・あれがないと解けません。→その後，別の問題でシートなしでも解くことができるようになった。
・わかりやすかったです。
・考え方がわかった。
・確実に問題が解ける。

自由感想

・個別指導は，とてもたのしかった。
・これからも数学に対して積極的に解いていきたい。

7. 成果と今後の課題

この４人の個別指導を通して，教師として生徒にわかるように教えるにはどうすればよいかを考えることで教材・教具の工夫ができた。生徒は，紙と鉛筆だけでなく簡単な材料を用いてできる教具を作成し使用することで問題解決でき，意欲的に個別指導にのぞんだ。そして，かわらばんの問題を解くのに座標軸をかき，関数を表すシートや区間を表すシートをうまく使用して迷いもなく，問題解決できるようになった。さらには，シートがなくても同じような問題を解くことができるようになった。

さて，２次関数の最大・最小の文字を含む問題の１つに，区間に文字を含む最大・最小の問題として次のような問題がある。

$0 \leqq x \leqq k$における２次関数$y=x^2-8x+7$の最大値と最小値を求めよ。

これは，平成13年12月中旬に実施した調査問題の１つであったが，問題１，２のようにＯＨＰシートを利用しての教具が当初考えつかなかったので本研究から除いていた。また，これまでこの問題についてのかわらばん教材は上記の問題どおりに同時に最大値と最小値を解かせていた。しかし，この問題も調査結果の分析の結果，やはり「区間の場合分けに関するつまずき」が多くみられた。そこで研究を行った結果，この問題についても教材・教具の開発をすることができた。具体的な教材と教具の開発であるが，教材についてはかわらばんNo.５からNo.８のxの範囲を$0 \leqq x \leqq k$と変えて使用すればよい。また，ＯＨＰシートを利用した教具については，次のように作成し，使用すればよいと考える。

①上述の教材かわらばんに問題の関数のグラフをかく。
②縦軸に沿ってはさみで５cmほどの切れ込みを入れる。
③ＯＨＰシートを５cm×８cmに切り，赤の油性マジックで塗りつぶす。
④このシートを切れ込みを入れたy軸に差し込んで左右に動かし区間を自由に変化させ問題解決させる。

これは4章，指導法の考察の(2)ＯＨＰシートを利用した教具の開発その2の応用である。自由に区間の幅を変えるにはどうしたらよいかということに着目して，他の教具と同じ材料のＯＨＰシートで開発することができた。

最後に，本研究は4人の生徒の実践にすぎない。今後40人学級において，この新しい教材と教具を含めて，生徒がつまずかないよう関数を表すシートと区間を表すシートの3つ（問題2の区間を表すシートについては，平成10年度に実践済み）をあわせて使用し実践を行い，その成果を検証したい。

参考文献

[1]Raffaella Borasi Reconceving Mathematics Instruction: A Foucus on Errors 1996

[2]川上雅子　2次関数の最大・最小におけるつまずきを生かした指導　日本数学教育学会誌　臨時増刊号 2002

[3]丸林英俊・三原茂雄　「2次関数」の指導上の問題点　鳴門教育大学研究紀要（教育科学編）1994

資料：かわらばんについて

かわらばんNo.1
2次関数 $f(x)=(x-a)^2$ の $0 \leqq x \leqq 2$ において
(1)　最大値 $M(a)$ を求めよ。
(2)　最小値 $m(a)$ を求めよ。
(3)　最大値 $M(a)$ と最小値 $m(a)$ を求めよ。

かわらばんNo.2
2次関数 $f(x)=(x-a)^2$ の $0 \leqq x \leqq 4$ において
(1)　最大値 $M(a)$ を求めよ。
(2)　最小値 $m(a)$ を求めよ。
(3)　最大値 $M(a)$ と最小値 $m(a)$ を求めよ。

かわらばんNo.3
2次関数 $f(x)=-(x-a)^2$ の $0 \leqq x \leqq 2$ において
(1)　最大値 $M(a)$ を求めよ。
(2)　最小値 $m(a)$ を求めよ。
(3)　最大値 $M(a)$ と最小値 $m(a)$ を求めよ。

かわらばんNo.4
2次関数 $f(x)=-(x-a)^2$ の $0 \leqq x \leqq 4$ において
(1)　最大値 $M(a)$ を求めよ。
(2)　最小値 $m(a)$ を求めよ。
(3)　最大値 $M(a)$ と最小値 $m(a)$ を求めよ。

かわらばんNo.5
2次関数 $f(x)=(x-1)^2$ の $a \leqq x \leqq a+2$ において
(1)　最大値 $M(a)$ を求めよ。
(2)　最小値 $m(a)$ を求めよ。
(3)　最大値 $M(a)$ と最小値 $m(a)$ を求めよ。

かわらばんNo.6
2次関数 $f(x)=(x-2)^2$ の $a \leqq x \leqq a+2$ において
(1)　最大値 $M(a)$ を求めよ。
(2)　最小値 $m(a)$ を求めよ。
(3)　最大値 $M(a)$ と最小値 $m(a)$ を求めよ。

かわらばんNo.7
2次関数 $f(x)=-(x-1)^2$ の $a \leqq x \leqq a+2$ において
(1)　最大値 $M(a)$ を求めよ。
(2)　最小値 $m(a)$ を求めよ。
(3)　最大値 $M(a)$ と最小値 $m(a)$ を求めよ。

かわらばんNo.8
2次関数 $f(x)=-(x-2)^2$ の $a \leqq x \leqq a+2$ において
(1)　最大値 $M(a)$ を求めよ。
(2)　最小値 $m(a)$ を求めよ。
(3)　最大値 $M(a)$ と最小値 $m(a)$ を求めよ。

（提出日　2002年9月30日）

On The Guidance and Analysis to Students Who Have Difficulties in Understanding on Maximum and Minimum in Quadratic Functions

— Practical Individual Guidance by Usage of OHP − Sheets —

Hidetoshi MARUBAYASHI *, Masako KAWAKAMI **

We have known from the teaching experience that many students meet firstly the difficulties in understanding on the problem of maximum and minimum in quadratic functions after they entered to senior high school.

So we analyzed answer papers on quadratic functions and knew that the main reasons of difficulties in understanding were caused by "complexity in dividing the intervals" and "illusion that the intervals and the graph of the quadratic functions were moving at the same time".

We exploited teaching materials (so called "Kawaraban") and tools so that students could easily understand the problem above and we have individually guided four students with the teaching materials and tools.

We found out that the methods were very useful for students to understand the problem.

* Department of Mathematics ,Naruto Univeristy of Education
** Graduate student ,Naruto Univeristy of Education