関数 $y=ax^2$ とみなすことの困難性とその克服

－「リレーのバトンパス」の実践と事後調査を通して－

藤原　大樹
鳴門教育大学

要　約

本研究では，現実の世界の問題解決に向けて 2 量の関係を関数 $y=ax^2$ とみなす際に固有の困難性の実態とその克服策について明らかにすることを目的として，2 量の関係を関数 $y=ax^2$ とみなす判断の根拠となる事柄について考察し，実験授業と事後調査を行った．その結果，2 量の関係を関数 $y=ax^2$ とみなすことの困難性の要因として，関数 $y=ax^2$ とみなすか判断する際，座標平面上の点の並びがほぼ放物線になっているかをその観察からは判断できないことなど 3 点が導出された．また，2 量の関係を関数 $y=ax^2$ とみなすことの困難性を克服する方策として，授業と事後調査から，関数 $y=ax^2$ とみなすか判断する際，グラフ描画アプリに表示した点の多くに近接する放物線があるかを，入力された式 $y=ax^2$ の任意定数 a の値を多様に変えて観察する機会を設けることなど 3 点の有効性が示唆された．

キーワード：関数 $y=ax^2$ とみなす，判断の根拠，困難性

1．研究の背景と目的・方法

現実の世界の問題を関数を用いて近似的に解決する際，仮定を設けて事象を理想化・単純化し，ある変域において 2 量の間にある関数関係があるとみなすことが必要である．その学習指導においては，「2 量の関係がある関数であること」と「2 量の関係をある関数とみなすこと」を区別した指導の必要があり（永田，2004），藤原（2023）では，2 量の関係を一次関数とみなすことの段階的な指導についての精緻化が提案されている．

では，関数 $y=ax^2$ ではどうか．学習する以前に 2 量の関係を一次関数とみなすことを経験していれば，その後に関数 $y=ax^2$ とみなすことやこれを正当化することは自ずとできるのだろうか．みなすためには判断の根拠が必要であるし，その正当化にあたっては事象と定義とのずれ（ノイズ）が許容できる程度かどうかも重要であると考えられる．関数 $y=ax^2$ に固有の，みなすことについての困難性はないのであろうか．

そこで本研究では，現実の世界の問題解決に向けて 2 量の関係を関数 $y=ax^2$ とみなす際に固有の困難性の実態とその克服策について明らかにすることを目的とする．次の方法で研究を進める．

(1) 2 量の関係を関数 $y=ax^2$ とみなす判断の根拠となる事柄について考察し，みなすことの困難性と克服策を検討する．
(2) 実験授業で扱う教材と指導上の手立てを検討し，事前検討会を経て授業を構想する．
(3) 構想した実験授業と事後協議会を実施する．
(4) 事後調査としてアンケートを実施し，困難性とその克服策について分析する．

なお，藤原（2023）と同様に本研究では，統計データによる表やグラフから問題解決のための数学的モデルを作成し，現象理解や予測をする数学的モデリング(例えば清野（2011）の経験的モデル化)を対象とする．本研究では「モデリング」と略記することとする．

２．関数 y=ax^2 とみなす判断の根拠と困難性

岩田他（2015）は，関数を用いたモデリングで正しいことを説明する際，「定式化(formulate)の正当化」の要件として「用いた関数」「関数判断の数学的根拠」「理想化・単純化した事柄」を挙げ，記述の度合いで学習レベルを分けている（p.17）．この数学的根拠について，例えば2量の関係を比例とみなす際，その判断の根拠とは，x の値と y の値の商がほぼ一定であることや x の値が k 倍になると y の値もほぼ k 倍になっていること，つまり与えられたデータが関数の定義や特徴(条件)を概ね満たしている事実である．モデリングで得られる結果は，ある仮定を設けて理想化・単純化した上での暫定的，漸近的なものに過ぎない．この理解には，継続的な学習指導により生徒が様々な事象を数学で近似的に扱う類似経験を積み重ね，慣れていく必要がある（藤原，2016）．

では，関数 $y=ax^2$ とみなす判断の根拠となる事柄はどうか．一次関数と比較して検討する．

2量の関係を一次関数 $y=ax+b$ とみなす際，その判断の根拠となる事柄には図1が考えられる．

1-1　$(y-b)/x$ の値が一定になっていること．
1-2　変化の割合がほぼ一定であること．
1-3　座標平面上の点がほぼ一直線上に並んでいること．

図1　一次関数とみなす判断の根拠となる事柄

また2量の関係を関数 y=ax^2 とみなす際，判断の根拠となる事柄には図2が考えられる．

2-1　y/x^2 の値がほぼ一定になっていること．
2-2　x の値が k 倍になると y の値はほぼ k^2 倍になっていること．
2-3　座標平面上にとった点の並びがほぼ放物線になっていること．

図2　関数 $y=ax^2$ とみなす判断の根拠となる事柄

事柄1-1，1-2，2-1，2-2は表の値を観察・処理して見いだせる．表の値によっては，定義を満たす値とのずれの大きさや多さが気になり，みなすことを正当化することが難しい場合がある．

事柄1-3，2-3は座標平面上に点をとって観察して見いだせる．特に事柄1-2は，多くの点の近くに定木をあてることで，表の値を観察・処理したときよりもずれの大きさや多さが捨象されて見えることが多く，みなすことを正当化しやすい．それゆえ，一次関数とみなす際は，グラフで視覚的に判断することは有効といえる．さらに端末でグラフ描画アプリに「$y=ax+b$」と入力し，既習知識を用いて任意定数 a，b を適宜変更すれば，視覚的に近似直線の式が得られる（藤原，2023）．

一方で事柄2-3は，事柄1-2と異なり，放物線かどうかを視覚で正確には判断できない．これは関数 $y=ax^2$ とみなす際の困難性の1つと捉えられる．そこで関数 $y=ax^2$ とみなす際も，グラフ描画アプリに「$y=ax^2$」と入力し，任意定数 a を変更し，多くの点の近くを放物線が通るかを観察すれば，事柄2-3を判断の根拠として用いることができると考えられる．

また，図1，2で挙げた事柄以外にも，関数 $y=ax^2$ には生徒が見いだしやすい特徴がある．それは，等間隔に変化した x の値に対応する y の値の第1階差が等間隔に変化していることやその第2階差が一定であることである．例えば図3は，関数 $y=2x^2$ の表から特徴を自由に見いだす授業における生徒の記述で，y の値の第2階差である「+4」を5箇所に記述している．一次関数の既習の変化の割合と同様の見方に基づくこのような反応に，筆者は過去に何度も遭遇した経験がある．

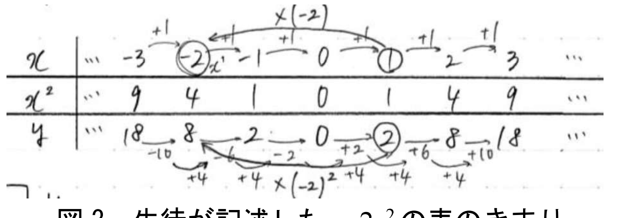

図3　生徒が記述した $y=2x^2$ の表のきまり

そこで，単元の学習過程で，関数 $y=ax^2$ における y の値の第2階差などの特徴を理解しておけば，みなす際には事柄2-4も判断の根拠として用いることができると予想される．なお中学校理科で扱う斜面に沿った運動の事象と関連付け，数学科と理科の双方の理解を深める指導も考えられる．

2-4　等間隔に変化した x の値に対応する y の値の第2階差が一定であること．(y の値の第1階差が一次関数の y の値のようにほぼ等間隔で変化していること.)

図4　関数 $y=ax^2$ とみなす判断の根拠となる事柄

なお，関数 $y=ax^2$ の特徴は一次関数の特徴よりも複雑であるため，苦手な生徒は判断の根拠となる事柄を見いだす際に困難が伴うことが予想される．その上，中 3 では既習の関数が関数 $y=ax^2$ 以外にも多くあり，2 量の関係をどの関数とみなすかを選択・判断する際に困難が生じそうである．これらの点は，事後調査で検証する．

３．実験授業の構想

中 3 の「関数 $y=ax^2$」単元は義務教育における関数学習の集大成である．そこで実験授業では，関数 $y=ax^2$ のみならず一次関数も扱え，複数の関数同士の操作や現実的解釈などが総合的に含まれる教材「リレーのバトンパス」（大澤，1996）を扱うこととした．大澤の実践では，実際に生徒が走るデータを収集し，グラフ電卓の 2 次近似機能を用いて理想的なマークポイントを見いだしている．本研究では，統計データからどんな関数とみなすか，またみなす判断の根拠は何か，みなすことを正当化できるかに光を当てるため，根拠を基に説明する活動を重視し，図 5 の問題を印刷した紙のワークシートを配付して生徒に考察させる．

図 5 のデータは，山元（2014）で世界的一流選手の記録から算出された「モデルペース配分」を参考に，筆者が高校生選手の既存記録と照合して自作した．一郎(前走者)のパス直前の走りはほぼ $y=8x$，二郎(次走者)のスタートダッシュは既知の関数を安易に適用しないように変域を意識し，関数 $y=2x^2(0 \leqq x \leqq 2.5)$ とみなす想定で値を調整した．

本時では図 5 の問題とデータから，2 人の x，y の関係として関数 $y=8x$，$y=2x^2(0 \leqq x \leqq 2.5)$ を得た後，二郎は一郎が何 m 手前に来たときに走り始めればよいかを求めるために，状況を視覚化するために，図 6 のように同じ座標平面上に 2 つの関数のグラフを重ねてかく反応が予想される．

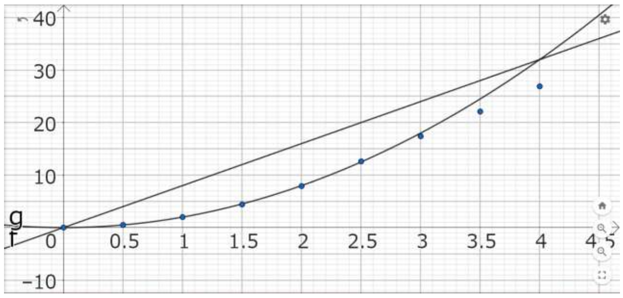

図 6　関数 y=8x と y=2x² のグラフ

二郎の座標軸を基準とすれば，$x=0$ は二郎が走り始める瞬間を表す．予想される反応の図 6 は，一郎が二郎を追い越した後，二郎が一郎を追い越し返す状況を表している．二郎はこれより早いタイミングで走り始めれば時間のロスを減らせる．そこで，1 回だけ追い付く（2 つのグラフが接する）ことを考え，$y=8x$ のグラフを y 軸の正の方向に b 平行移動させたり(図 7)，関数 $y=8x+b$，$y=2x^2$ から得た二次方程式 $2x^2=8x+b$ が重解をもつことから b の値を求めたりして，$b=-8$ を得られる．

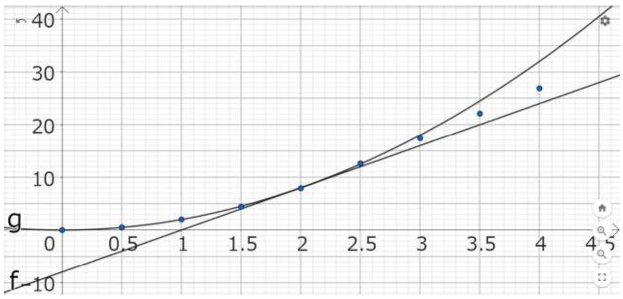

図 7　関数 y=8x−8 と y=2x² のグラフ

以上は，「2 人が同じ時間に同じ地点にいる瞬間にバトンパスを行う」と仮定した考えである．$b=-8$ を現実の場面で解釈すると，問題に対して

高校陸上部の大会(リレー)に向けて，一郎さんから二郎さんへ理想的なバトンパスをする方法を考えます．二郎さんは一郎さんが何 m 手前に来たときに走り始めればよいでしょうか．

・一郎さん(前走者)がバトンをパスする直前あたりの時間と距離の関係(ある地点を 0m とする．)

時間 x(秒)	…	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	…
距離 y(m)	…	0	3.9	8.0	11.8	16.1	20.0	…

・二郎さん(次走者)がバトンを受けるときに全速力でダッシュした時間と距離の関係

時間 x(秒)	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	…
距離 y(m)	0	0.5	2.0	4.4	7.9	12.6	17.4	22.1	26.9	…

図 5　授業で扱う問題とデータ

「8m 手前」と結論付けられる．更に，2 人が腕を伸ばしたときの利得距離を考慮し，1m 程度増やして「9m 手前」などと結論付けることもできる．

事前検討会での指導案検討では，主に指導の難所として，次の 4 つがあると予想された．

難所I：二郎の x，y の関係を関数 $y=2x^2(0\leqq x\leqq 2.5)$ とみなせるか．

難所II：重ねてかいた 2 つのグラフ(図 6)の交点が 2 つあることの現実的な意味を解釈できるか．

難所III：重ねてかいた 2 つのグラフの位置関係を評価・改善し，交点が 1 つになるように一郎のグラフを平行移動するなどして考えられるか．

難所IV：「何 m 手前に来たときに走り始めればよいか」を求めるために，グラフや式のどこに着目すればよいかに気付けるか．

本研究では難所Iに焦点化し，上記の難所II～IVの克服の詳細については稿を改める．難所Iを克服する手立てとして，次の 2 つを設定した．

手立て 1：二郎の x，y の関係を関数 $y=ax^2$ とみなす判断の根拠を図 4 の事柄 2-4 を含めて多様に見いだせるように，単元の学習過程で事前に，関数 $y=ax^2$ における y の値の第 2 階差などの特徴を複数回扱って指導しておく．

手立て 2：図 2 の事柄 2-3 を見いだせるように，多くの生徒がグラフを正確にかいて考えたくなったタイミングで，関数描画アプリ GeoGebra で二郎の(x，y)の各点と関数 $y=ax^2$ のグラフが表示された画面を共有し，任意定数 a を生徒が多様に変えて多くの点に近接する放物線があるかを観察する場面を設ける．

4．実験授業の実際

(1) 実験授業の概要

都内国立大学附属中学校 3 年生 4 クラス 101 名(Chromebook 使用)を対象とし，令和 5 年 11 月 2 日に筆者が授業者で実験授業を単元末に実施した．生徒は単元の冒頭で，理科で収集した斜面落下運動の実験データを GeoGebra の放物線で近似した経験がある．本時の目標は「具体的な問題を解決するために，2 量の関係を関数 $y=ax^2$ などとみなし，複数のグラフやその位置関係，交点などの場面での意味を解釈，処理して未知の値を求め，その結果や過程を表現することができる」とする．

なお，単元前半の関数 $y=1/2x^2(x\geqq 0)$ の表から自由にきまりを見いだす学習で，等間隔に変化した x の値に対応する y の値の第 1 階差，第 2 階差の特徴を多くの生徒が見いだし記述していた．全体でこの特徴を取り上げて，授業者が用語「第 2 階差」などを紹介して強調するとともに，次時にも関数 $y=1/2x^2(x\leqq 0)$，関数 $y=2x^2$ などで同様の特徴がいえることを確認した(手立て 1)．進んだ生徒の中には文字での証明に試みる者もいた．

以下に，1 クラス(25 名)の実験授業の様子を，難所Iに関わる部分を中心に報告する．

(2) 実験授業の様子

授業の冒頭では，スライドを用いて問題場面を提示し，「一郎さんが何 m 手前に来たときに二郎さんは走り始めればよいか」を求めることが本時の問題であることを共有した．授業者は両手の人差し指を一郎と二郎に見立て，リレーのバトンパスの時間ロスをしてしまう状況の例について，動的なイメージとともに説明した．問題の解決のために何があればよさそうかと聞くと，「2 人の速さ」と意見が出された．これを受けて図 5 の問題を印刷した紙のワークシートを配付した．

5 分ほどまず一郎の x，y の関係について各自で考えさせたところ，ほぼ全員が一郎の表の近くに「$y=8x$」「ほぼ $y=8x$」と書いていた．進んだ生徒は二郎の走りの考察にまで及んでいたが，一旦活動を止めてもらい，Ob 生を指名して考えを発表してもらった．Ob 生は一郎の表を縦や横に見て，根拠に基づいて $y=8x$ とみなすことができることを全体で説明した．その後「二郎さんはどうでしょうか」と問いかけ，再び各自で考える時間を設けた．必要に応じてまわりと相談してよいこととしたが，黙々と各自で考えていた．

生徒は，表を縦に見て対応を捉え，y/x^2 の値がほぼ 2 であると気付いたり，表を横に見て変化を捉え，第 2 階差がほぼ 1 であると気付いたりしていた．これらの事柄を判断の根拠にしてワークシートに $y=2x^2$ と記入する生徒が全体の 2/3 程度いた．中には，$x=2.5$ あたりを境に変化の仕方が変わっていることに気付いて変域の不等式を記入する生徒が多くいた一方で，その気付きから逆に立

式を躊躇する生徒もいた．そこで二郎の走りについて Ks 生(図 8 を記述)，Ss 生を指名し，第 2 階差が $0<x<2.5$ でほぼ 1 で，$x>2.5$ で大きく減少すること，式 $y=2x^2$ の($2 \leqq x \leqq 2.5$)の求め方を発表してもらった．$x>2.5$ では二郎は秒速約 9.5m で，秒速 8m の一郎は追い付けないことを確認した．

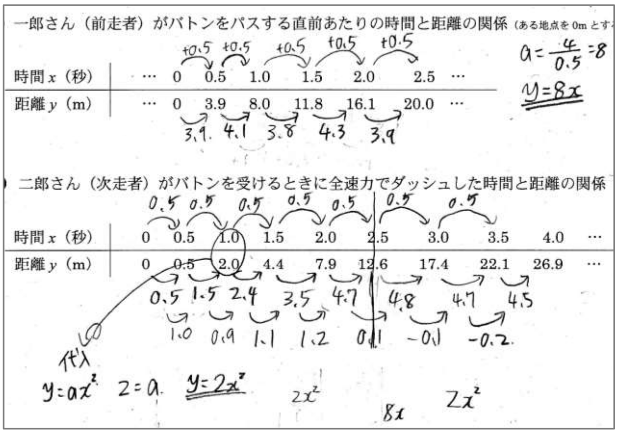

図 8　ワークシートへの Ks 生の記述(一部)

第 2 階差がほぼ 1 であることなど，生徒が判断の根拠とした事柄を矢印などで黒板に書き残し，理解や正当化を促すよう努めた(図 9)．

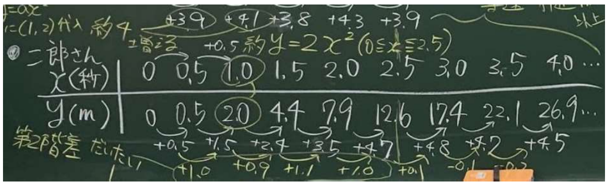

図 9　二郎の表などを記した授業板書の一部

その後，この 2 つの関数を用いて問題を解決するために自由に考える場面を設けたところ，ワークシートに座標軸をかいて点をとる生徒がクラスの半数程度出ていた．その一人は，2 人のグラフをかいて出合うところを求めようとしているという意図を発表した．そのタイミングで，GeoGebra のワークシートのリンクを生徒に配付して，使い方を簡潔に説明した(手立て 2)．二郎の点(x，y)の多くに $y=2x^2$ のグラフが近接する画面を見て「すごい」と驚く生徒も見られた．

多くの生徒が GeoGebra の画面に $y=8x$，$y=2x^2$ のグラフを重ねて表示させていた(図 6)．同様の画面を前面のスクリーンに映し出すとともに，グラフを黒板にもかき，2 人の位置を表す円形磁石を貼るなどして，グラフが表す現実場面での状況を考えさせた．周囲の生徒同士で対話する中で，原点の位置で 2 人が同時に走り始めていること，追い越す瞬間が 2 回あり時間にロスがあること，座標軸を二郎の時間と距離としたときに一郎のグラフを平行移動して 2 つのグラフの交点が 1 個になるようにすればよいことを見いだしていった．その過程を経て，生徒たちは一郎のグラフの切片の絶対値を答えにできることに気付いていった．

全体ではまず，グラフの平行移動による視覚的な解決を取り上げた．次いで，二次方程式を用いた代数的な解決方法，二次方程式の解の公式を使う方法も取り上げた(図 10，図 11)．

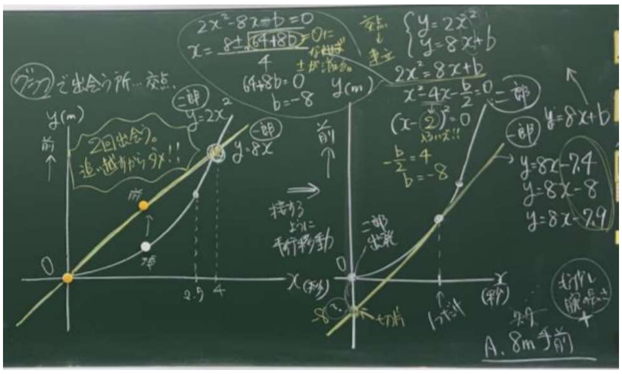

図 10　重ねたグラフなどを記した授業板書の一部

最後に，改めて「数学的な答え」が「8m 手前」であることを確認し，Bb 生が男子高校生の利得距離(保健体育科で既習)が 1m 程度ありそうであると意見した．これを受け，最前列の座席の生徒と授業者とが黒板の前でバトンパスの姿勢を演じ，利得距離が 1m 程度あることを確認した．

データを基にその関係を既知の関数とみなすことで数学の世界である程度有効な解決ができる旨を授業者が伝え，授業を終えた．

事後検討会では，二郎の x，y の関係を生徒が探る場面に関して参観者から，変域 $x>2.5$ で一郎よりも速くなるので追い付けなくなることの扱いが円滑であったことや，みなす上で手立て 1，2 が効果的であったことについての指摘があった．

5．事後調査の概要，結果，考察

事後調査として，対象生徒に対してアンケートを実施する．その目的は，①実験授業で関数 $y=ax^2$ とみなすことの可否とみなす判断の根拠(手立て 1 の効果を含む)，②上記①の正当化の可否とその理由(手立て 3 の効果を含む)，③2 量の関係をある関数とみなすことの学年進行に伴う困難

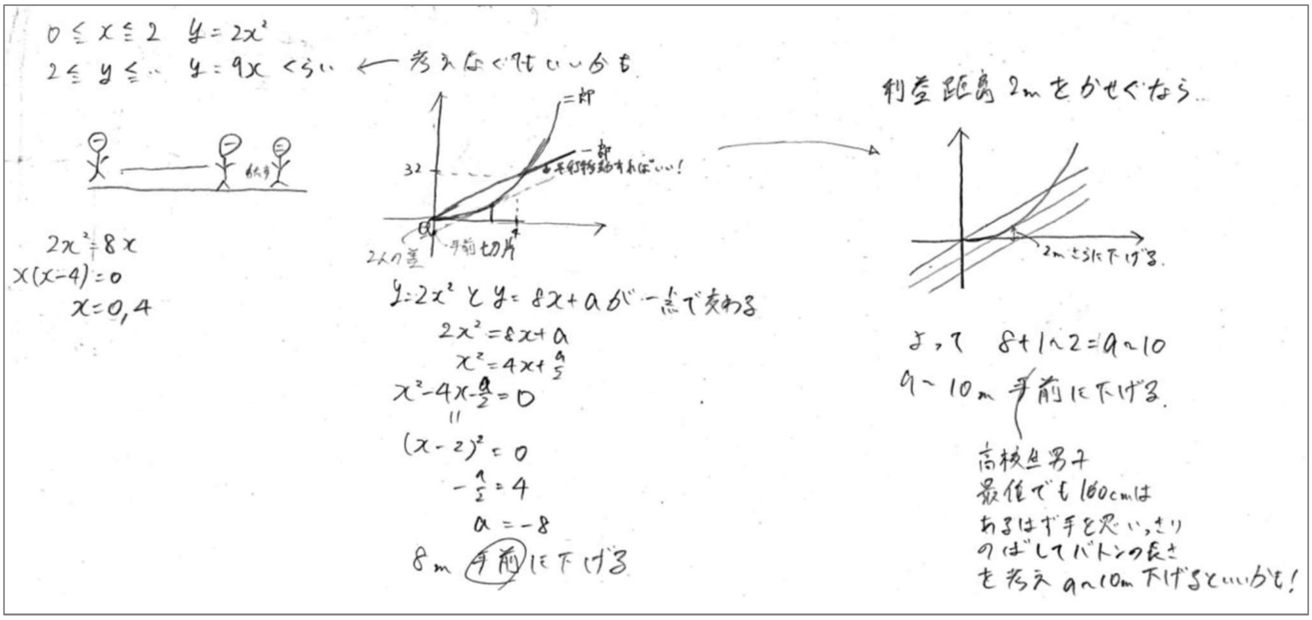

図 11　ワークシートへの Bb 生の記述(一部)

性の意識とその理由，について実態把握することである．本時の翌時に Google フォームで表 1 の項目を質問し，生徒 96 人の回答を得た．

表 1　事後調査の質問項目

Q1-1	ある変域で関数 $y=ax^2$ とみなすことを，あなたは自力でできましたか．(5 件多肢選択)
Q1-2	上記の質問で「自力でできた」と回答した人に質問です．どんなことを根拠にしてみなしましたか．(6 件多肢選択　複数選択可)
Q2-1	この授業で，ある変域で関数 $y=ax^2$ とみなす考えに納得しましたか．(4 件多肢選択)
Q2-2	Q2-1 の理由を教えてください.(自由記述)
Q2-3	GeoGebra の座標平面上にとった点に $y=ax^2$ のグラフを重ねましたが，みなすことを納得する上で助けになりましたか．(4 件多肢選択)
Q3-1	みなすことの難しさは，1 年生→2 年生→3 年生で変わりましたか．(2 件多肢選択)
Q3-2	上記の「難しさは変わったか」についての理由を教えてください．(自由記述)

Q2-1, 2-3 では，みなすことの正当化を，生徒に伝わりやすそうな用語「納得」を用いて訊いた．

Q1-1 の結果は表 2 のとおりである．

表 2　Q1-1 の回答結果(n=96)

選択肢	反応
ア．みなすことができた．関数 $y=ax^2$ の式を立てられた．	66.7% (64 人)
イ．みなすことができた．関数 $y=ax^2$ の式は立てられなかった．	15.6% (15 人)
ウ．みなすことはできなかった．比例や一次関数とみなすことができないことは気づいていた．	15.6% (15 人)
エ．みなすことはできなかった．どんな関係になっているか見当がつかなかった．	2.1% (2 人)
オ．みなすことができそうだったが，敢えてみなさなかった．	0.0% (0 人)

二郎の x，y の関係を自力で関数 $y=ax^2$ とみなすことができた生徒はアとイの合計 82.3%(79 人)で，望ましい結果といえる．Q1-2 はこの 79 人を対象とする意図であったが，72 人の回答しか得られなかった．

Q1-2 の結果は表 3 のとおりである．ウとエはほぼ同一の事柄なので点線で区切ってある．

表 3　Q1-2 の回答結果(n=72)

選択肢	反応
ア．x の値が 2 倍，3 倍，…になると，y の値が 4 倍，9 倍，…にほぼなっていた．	70.3% (52 人)

イ．x の値の 2 乗で y をわった商がほぼ一定になっていた．（式 $y=ax^2$ にほぼ当てはまっていた．）	25.7% (19 人)
ウ．第 1 階差が一次関数のように等間隔で変化していた．	27.0% (20 人)
エ．第 2 階差がほぼ一定になっていた．	35.1% (26 人)
オ．座標平面に自分でかいた点の並びが放物線のようになっていた．	36.5% (27 人)
カ．問題文からある程度予測できた．	1.4% (1 人)

「ア 2 倍 3 倍」が 7 割以上と多いが，次いで「オ放物線」と「エ第 2 階差」がそれぞれ 3 割前後で多い．「エ第 2 階差」が多いのは手立て 1 によるものと捉えられる．回答を個別に見ると，複数の選択肢を選んだ回答が 61.1%(44 人)あった．確定事象では判断の根拠は 1 つで十分であるが，不確定事象に対してみなす判断の根拠を複数挙げようとする望ましい態度が表れているといえる．

次に，Q2-1 の結果は表 4 のとおりである．

表 4　Q2-1 の回答結果 (n=96)

選択肢	反応
ア．納得した．	67.7%　(65 人)
イ．だいたい納得した．	31.3%　(30 人)
ウ．あまり納得しなかった．	1.0%　(1 人)
エ．納得しなかった．	0.0%　(0 人)

1 人を除く 99.0%がアかイと回答しており，ほぼ全員が関数 $y=ax^2$ とみなすことを正当化できたと解釈される．正当化できた 95 名による Q2-2 の自由記述から，正当化できた理由をキーワードで分類し，表 5 に記述例とともに示す．(表 5 の下線は分類の際のキーワードの例)

表 5　Q2-2 の正当化できた理由の分類 (n=96)

理由 1：みなすことの経験的な慣れ 例) 今まで，どうしても増え方などに誤差が出てしまう場合，1 次関数や比例でみなすことができた．これと同じように，二次関数でもみなすことで問題が解けるようになると理解したから．
理由 2：みなす根拠となる事柄(単一)の発見 例) 表にわかることをどんどん書き込んでそこからわかる特徴と，以前学習していた $y=ax^2$ のときの表やグラフの特徴と照らし合わせながら考えることができたので．
理由 3：みなす根拠となる事柄(複数)の発見 例) $y=ax^2$ となる変域ではほぼ第二階差が一定になっていることが理解できたから．また，他の方法でも確かめられたから．
理由 4：独力でみなした自信，他者との考えの一致で得た安心感など 例) 自分で変域や式などを考えることができたから．

みなすことに経験的に慣れてきたり，判断の根拠となる事柄を単一あるいは複数発見できたりすれば，関数 $y=ax^2$ とみなすことについての正当化がもたらされると解釈できる．なお，関数に限らず，答えが 1 つに決まらない問題では特に，独力で答えが出せた自信や自分と他者で考え等が一致した安心感が正当化につながるとも解釈される．

一方，Q2-2 でウ「あまり納得しなかった」と回答した生徒は，理由を「『みなす』について疑問を持ったり，考えたことがなかったので難しかったからです.」と記述していた．みなすことへの経験不足が困難性の要因であったと解釈される．

Q2-3 の結果は，表 6 のとおりである．

表 6　Q2-3 の回答結果 (n=96)

選択肢	反応
ア．助けになった．	67.7% (65 人)
イ．助けに少しなった．	26.0% (25 人)
ウ．助けにあまりならなかった．	6.3% (6 人)
エ．助けにならなかった．	0.0% (0 人)

93.7%がアかイと回答している．グラフ描画アプリを用いた手立て 2 がほとんどの生徒の正当化に役立つ有効な手立てであったと解釈される．

Q3-1 の結果は表 5 のとおりである．

表 7　Q3-1 の回答結果 (n=96)

選択肢	反応
ア．簡単になってきた．	14.6% (14 人)
イ．それほど変わらない．	40.6% (39 人)
ウ．難しくなってきた．	44.8% (43 人)

ウが 44.8%で最も多い．Q3-2 の理由についての自由記述を Q3-1 の回答で分類したところ，ウの

理由では，「学年進行に伴う関数の特徴の難しさやみなす関数の選択肢の増加」について記述したものが 43 人中 40 人と最多であった．これは関数 $y=ax^2$ とみなすことの困難性の要因の 1 つといえる．関数の選択肢が増加することはやむを得ないが，2 量の関係からどの関数の特徴を概ね満たすかを判断できるように，比例，反比例，一次関数の特徴を関連付けて概念的に理解しておくことの重要性が示唆される．なおアの理由は，表 5 の理由 1 に関する記述が 14 人中 11 人と最多であった．

６．研究の成果と課題

本研究では，生徒対象の事後調査などから，2 量の関係を関数 $y=ax^2$ とみなすことの困難性の要因を導出した．

要因 1：関数 $y=ax^2$ とみなすか判断する際，座標平面上の点の並びがほぼ放物線になっているかをその観察からは判断できないこと．

要因 2：関数 $y=ax^2$ の定義や特徴は，一次関数などの定義や特徴に比べて複雑で，表の値などが概ね満たしているかを判断しにくいこと．

要因 3：関数 $y=ax^2$ の学習で，2 量をある関数とみなすかを判断する際，その選択肢が一次関数や反比例など多様にあり，定義や特徴を概ね満たしているかの判断に手間がかかること．

上記の要因を踏まえ，2 量の関係を関数 $y=ax^2$ とみなすことの困難性を克服する方策として，授業と事後調査から，以下の有効性が示唆される．

方策 1：関数 $y=ax^2$ とみなすか判断する際，グラフ描画アプリに表示した点の多くに近接する放物線があるかを，入力された式 $y=ax^2$ の任意定数 a の値を多様に変えて観察する機会を設けること(要因 1，2 に関連)

方策 2：関数 $y=ax^2$ とみなす判断の根拠となる事柄を生徒が複数見いだせるように，関数 $y=ax^2$ の特徴の 1 つとして，x の値が等間隔に変化したときの y の値の第 2 階差が一定であることを単元で事前に指導しておくこと(要因 2 に関連)

方策 3：関数 $y=ax^2$ の学習指導において，その表，グラフ，式の特徴を生徒が概念的に理解できるように，一次関数など他の既習の関数と関連付けて指導しておくこと(要因 3 に関連)

なお，方策 2 に関連して，不確定事象についてのモデリングでは，ある関数とみなす判断の根拠として，例えば表の値からわかる事柄のみを用いるのではなく，グラフでも表してみてその判断の妥当性を複数の表現で批判的に検討する態度は重要である．表，グラフ，式の相互関係の理解に基づいたこの態度を，中学校 1，2 年で生徒の実態に応じて伸ばす関数の学習指導が，関数 $y=ax^2$ での困難性を克服する一助となり得ると考えられる．

引用・参考文献

藤原大樹（2016）．数学的モデリングにおける近似の考えに否定的な生徒の長期的な意識変容．日本科学教育学会年会論文集，40，331-332．https://doi.org/10.14935/jssep.40.0_331

藤原大樹（2023）．一次関数とみなすことの段階的指導で扱う教材の分類と授業化．日本数学教育学会第 11 回春期研究大会論文集，95-102.

岩田耕司・宮崎樹夫・牧野智彦・藤田太郎（2015）．課題探究として証明することのカリキュラム開発-領域「関数」における証明の構成の学習レベル-．日本数学教育学会第 3 回春期研究大会論文集，13-18.

大澤弘典（1996）．現実場面に基づく問題解決-グラフ電卓を利用した合科的授業展開を通して-．日本数学教育学会誌，78（9），248-255.
https://doi.org/10.32296/jjsme.78.9_16

永田潤一郎（2004）．「比例としてみなす」ことのよさについての考察．日本数学教育学会誌，86（3），13-20.
https://doi.org/10.32296/jjsme.86.3_13

清野辰彦（2011）．学校数学における経験的モデル化と理論的モデル化-双方の活動を経験できる教材とその教育的価値-．日本数学教育学会誌，93（11），2-11.
https://doi.org/10.32296/jjsme.93.11_2

山元康平（2014）. 400m 走のペース配分（レースパターン）③．筑波大学陸上競技研究室．陸上競技の理論と実際第 35 回．
https://rikujo.taiiku.tsukuba.ac.jp/column/2014/35.html(2024.2.27 参照)