道幅の概念と螺旋への応用

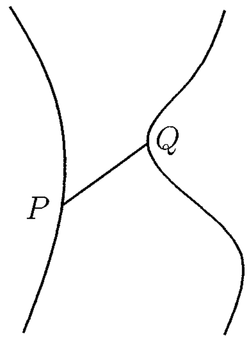
教科・領域教育専攻
自然系コース (数学)
秋山 敬亮

指導教員 松岡 隆

1 はじめに

道幅の概念の数学的定義は，これまで行われていないと思われる．そこで道幅の概念を定義した．道幅が一定であるための十分条件を求めた．また，周間の距離が一定であるアルキメデスの螺旋に対し，本論文で定義した道幅について調べた．その極限についても調べた．

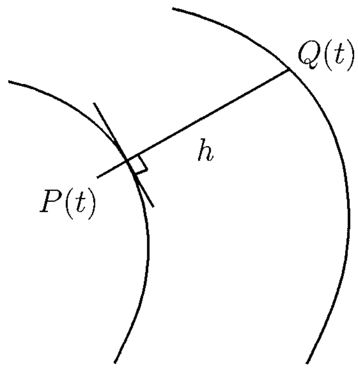
2 道幅の概念



一組の相対する辺を指定した長方形を考える．その平面の中への微分可能な同相写像の像を道と呼ぶことにする．指定した辺の組の像を道の境界と呼ぶ．境界上の点 P を考える．点 P から，もう一方の境界への最短距離を点 P における道幅と定義する．この時，点 Q における道幅は点 P における道幅と必ずしも一致するとは限らない．

道幅の概念は川のような二つの曲線に挟まれた領域にも適用できる．

3 道幅が一定の十分条件

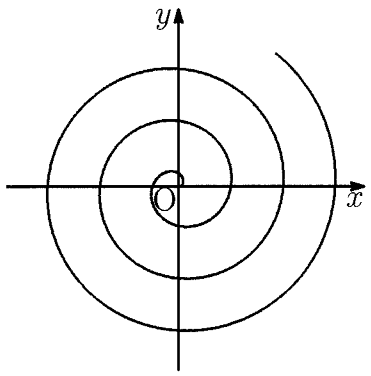


$P(t)$ $(t_1 \leq t \leq t_2)$ が定める微分可能な曲線 C を考える．曲率 $k(t) > -1, P'(t_1) \cdot P'(t_2) > 0$ を仮定する．
$P(t) = \bigl(x(t), y(t)\bigr)$ から法線を引き一定の距離 h となる点を $Q(t) = \bigl(u(t), v(t)\bigr)$ とする．

定理
$P(t)$ と $Q(t)$ が作る道は道幅が一定である．

この定理の証明方法は，曲率に関する公式と速度ベクトルによる内積の性質を用いる．

4　アルキメデスの螺旋について



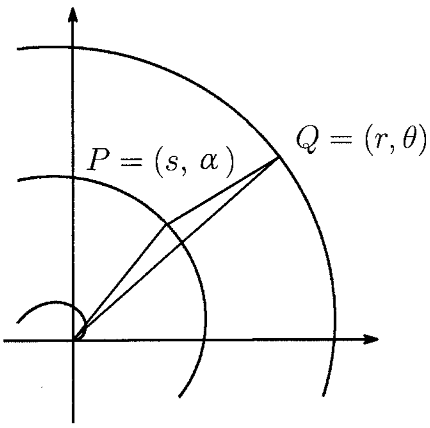
螺旋やスパイラル (spiral) などとよばれる平面曲線の多くは，極座標 (r,θ) により $r = f(\theta)$ の形で表現される. アルキメデスの螺旋は

$$r = a\theta$$

という方程式をもち, 上のようなグラフになり，回転する円盤の中心から一定の速さで外に向かう物体が描く軌跡なので，周間の距離は一定になる．二直線 $\theta = \theta_1$ と $\theta = \theta_2 (\theta_1 < \theta_2)$ および，この曲線に囲まれる面積は $\frac{a^2(\theta_2^3-\theta_1^3)}{6}$ となることをアルキメデスは発見している.

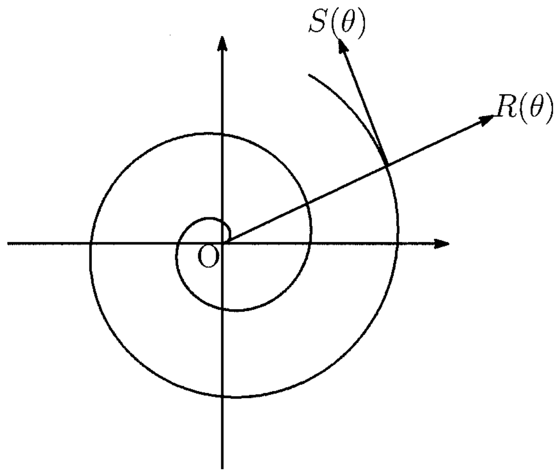
5　アルキメデスの螺旋の場合

5.1　道幅の概念のアルキメデスの螺旋への応用



アルキメデスの螺旋は一本の曲線なので, このままでは先ほど定義した道の概念には当てはまらないが部分的に切り取ることにより，道と考える．このとき道幅は，ほとんど変化しないように見える．そこで道幅が実際どのように変化するか図の PQ 間の距離に着目して調べた.

5.2　アルキメデスの螺旋の道幅の極限



アルキメデスの螺旋の接線方向の単位ベクトル $S(\theta)$ と単位ベクトル $R(\theta)$ のなす角を考え，$\theta \longrightarrow \infty$ とすると $S(\theta)$ と $R(\theta)$ のなす角が $\frac{\pi}{2}$ に近づくことを用いてアルキメデスの螺旋の道幅の極限について考えた.

参考文献

関沢真躬著，微分幾何学入門，日本評論社