数学を活用して身の回りの事象を解決することのよさと限界を実感する授業の実証的研究

高度学校教育実践専攻　　実習責任教員　金　児　　正　史
教職実践力高度化コース　　実習指導教員　泰　山　　　裕
庄　野　　泰　志

キーワード：数学的活動、数学的モデル化過程、定式化、検証、数学のよさと限界

１　置籍校の実態

平成 27 年度及び平成 28 年度の全国学力・学習状況調査結果によれば、「数学の授業で学習したことを普段の生活の中で活用できないか考えますか。」の質問事項は、肯定的に答えた生徒の割合は少なく、全国平均と比較すると、置籍校では、数学を活用したいと思う生徒が少ない。このことが置籍校の課題である。

２　数学の授業の課題を解決するための方針

生徒に数学を普段の生活に活用する実体験をさせ、数学をどのように活用するのか教えたいと考えた。そして、置籍校における数学の授業の課題を解決するために、３つの方針を立てた。

本研究では、特に中学校学習指導要領解説が唱える数学的活動の特性のうち「疑問や問いの発生、その定式化による問題設定、問題の理解、解決の計画、実行、検討及び新たな疑問や問い、推測などの発生と問題の定式化と続く。それら一連の活動を実体験することは、数学を学ぶことの面白さや考えることの楽しさ、数学の必要性や有用性を実感する機会をもたらしてくれる。」に着目した。

さらに、現実の世界の問題を数学の問題に翻訳して解決していく学習過程を重視する必要があると考えた。先行研究の中で、筆者は数学的モデル化過程に着目した。本研究では三輪(1983)の数学的モデル化過程を援用し「定式化、数学的作業、解釈・評価、より良いモデル化の４段階を踏むこと」と定義し、三輪が示す模式図を援用する(図 1)。

また、現実の世界の問題を、数学的モデル化過程を活用して解決するとき、単純化や理想化などの、定式化の段階で、現実の世界の問題の条件などが捨象される。したがって、数学的モデル化過程を活用した現実の世界の問題の解決には、自ずと限界がある。本研究では、数学的モデル化過程の限界にも着目し、生徒が限界を知ることで、より現実の世界の問題を映し出す数学的モデル化を検討する必要性を実感させ、主体的に新たな数学的モデル化を行うように促す指導を試みることにした。

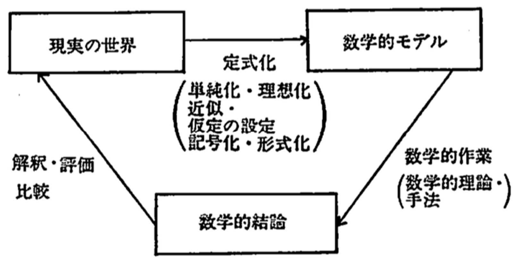


図 1 数学的モデル化過程　(1983 三輪)

このように、数学的活動を重視し、数学的モデル化過程を生徒に体験させ、数学的モデル化過程に限界があることを実感させることで、生徒が自ら、現実の世界の問題を、数学を活用して解決していくように導く授業の立案と実践に取り組んだ。

３　本研究の目的と実験仮説

本研究の目的

本研究は、現実の世界の問題を、数学を活用して解決する授業に、生徒が取り組むことで、数学を活用して現実の世界の問題を解決する「よさや限界」を実感し、新たな現実の世界の問題についても、生徒が進んで数学を活用していこうとするようになることを、実証的に考察することである。また､本研究の目的を受けて、以下の実験仮説を設けた。

・実験仮説１

数学的モデル化過程のうち、現実の世界の問題の条件などを定式化して生成した数学の問題を解決するまでの過程で、特に定式化を重視すれば、生徒は新たな現実の世界の問題も、自ら定式化して数学的な解を求めるようになるだろう。

・実験仮説２

数学的モデル化過程のうち、数学の解が現実の世界の問題の答えとして適切かどうか検証する過程を重視すれば､生徒は検証の必要性を知り、数学を活用して現実の世界の問題を解決することのよさを実感できるようになるだろう。

４　授業の概要

本授業では、一塁から二塁への盗塁場面で、盗塁が成功するかどうか、数学を活用して解決する授業を計画した。1 時間目は盗塁の場面を生徒全員が捉えられるようにすることを、大きな目標とした。そこでは、映像を用いて、生徒が課題を把握しやすくする工夫をした。2 時間目にはとタッチが同時のときはセーフ、という野球のルールに着目させ、盗塁の事象の中にある、時間の相等関係について、生徒が気づけるように計画した。また、一次方程式の解を検証し、現実の世界の問題の答えとして適切かどうか確認する場面を大切にした。3 時間目は、2 時間目の検証の場面で、生徒が現実的でないと指摘した条件を見直して、より現実に近い、新たな二盗の課題や三盗や本盗の新たな問題も自ら作り、数学的モデルを活用して、自力解決できる場も設定した。

５　授業の実際

5.1　課題把握

プロ野球の実際の映像を 3 つの部分に分けて見た。その後、攻撃だけ、あるいは守備だけに注目させて、VTR1 を用いて、ランナーや守備の選手の動きを見せた。

5.2　定式化

ベースを点とみなすことで、生徒は、塁間 27.4m の距離が正方形の一辺になることを捉えた。次に、ピッチャープレートはどうしたいかを生徒に尋ね、生徒はピッチャープレートとピッチャーを同一の点とみなすとともに、ホームベースとキャッチャーも同一の点とみなして捉え、ピッチャープレートとホームベースの距離を、ピッチャーとキャッチャーの距離と自発的にみなして捉えていた。

5.3　一次方程式の立式

「同時はセーフ」の同時を『時間が等しい』と認識することで、生徒自ら「すべり込みの時間」と「タッチの時間」の相等関係を言葉の式で表した。

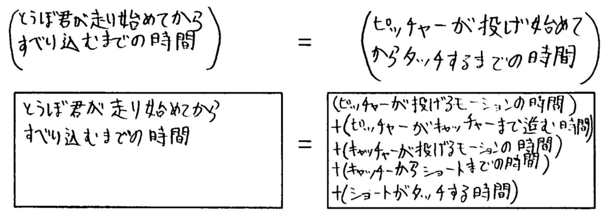


図 12　完成した言葉の式

言葉の式(1)を数式に直す段階では、生徒は、ランナーが走った時間を式に表すために、とうぼ君の走る速さや、守備にかかる時間を表すために、球速やモーションの時間、タッチする時間の情報を使って、それぞれ数式に表し、一次方程式を立式し、その解も求めた。

5.4　解の吟味と検証

生徒に現実の盗塁の場面を考えさせようとして、ランナーはリードを 3.3m にすれば必ず盗塁が成功するかどうか質問した。考えや理由をお互いに発表し合い、VTR2 を見たことで、現実には条件が常に成り立つわけではないことがわかり、生徒全員がこの時点で、盗塁を数学で解決することの限界に気づいていた。

5.5　異なる条件の二盗の問題作りとその解決

ピッチャーやキャッチャーの球速、モーションの時間をより現実に近づけるために、生徒に自ら条件を変更した。

5.5.1　生徒の自作問題例

ピッチャーとキャッチャーの球速は等しく、数値だけを変えた問題や、モーションの時間は 3 人とも等しいが数値だけを変えた問題、すべての数値を変えた問題、ピッチャーがモーションに入ってしばらくしてからランナーがスタートするとした問題など、生徒は十人十色に条件を変えて、一次方程式を立式した。

5.6　三盗や本盗の問題作りとその解決

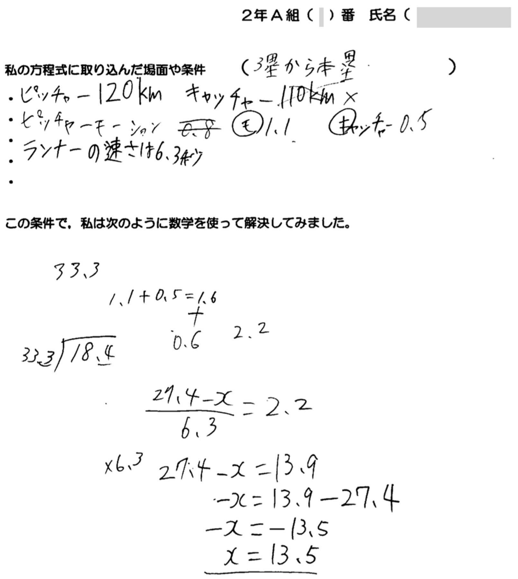
三盗や本盗では、二盗の場合とランナーの動きは基本的に同じだが、三盗は三塁でタッチすること、本盗ではキャッチャーは投げずにタッチすることなどを自分で考え、場面に合わせた一次方程式を作り始めた。

5.6.1　三盗の問題作りとその解決

三盗の問題作りでは、投手が球速 164km/時の大谷選手、ランナーが 100m を 9 秒で走るボルトに見立てる生徒がいるなど、自発的な問題作りができた。

5.6.2　本盗の問題作りとその解決

本盗では、守備側に必要な時間は、「ピッチャーのモーションの時間」＋「ピッチャーからキャッチャーまでの時間」＋「キャッチャーがタッチする時間」の 3 つである。このことを的確に理解して正しく立式した生徒の例である。



2年Ａ組（ ）番　氏名（ ）

私の方程式に取り込んだ場面や条件　（3塁から本塁　）

・ピッチャー－120km　キャッチャー－110km ×
・ピッチャーモーション ~~0.8~~ モ 1.1　キャッチャー 0.5
・ランナーの速さは6.3秒
・
・

この条件で，私は次のように数学を使って解決してみました。

33.3

1.1＋0.5＝1.6
＋
0.6　2.2

33.3）18.4

$$\frac{27.4-x}{6.3}=2.2$$

$$\times 6.3 \quad 27.4-x=13.9$$
$$-x=13.9-27.4$$
$$-x=-13.5$$
$$x=13.5$$

6　授業の分析

6.1　課題把握

映像による課題把握は、第 1 時に与えた課題の、言葉の式を作るときにも有効に機能していただけでなく、三盗や本盗の問題作りでも、多くの生徒はそれぞれの盗塁のその動きを的確に捉えるときにも有効だった。

6.2　定式化

現実の世界の事象を、数学を活用して解決する経験がない生徒を対象とした授業では、特に定式化の最初の段階を重視し、定式化を丁寧に行いながら、生徒に明確な数学的モデルを作らせることが重要であると実感した。

6.3　一次方程式の立式

一次方程式を立てる際に、必要な情報は何か、生徒に発見させ、彼らの求めに応じて、筆者がランナーや球速、モーションの時間などの条件を与えた。このことによって、生徒に一次方程式の立式を、丁寧に捉えさせるとともに、自ら一次方程式を立式する実感を持たせる機会にすることができた。

6.4　解の吟味と検証

数学的な解を吟味し、現実の世界の問題の答えとして適切かどうか検証する作業は、生徒に多くの情報を与えることにつながり、数学的モデル化過程のよさと限界を知ったうえで、それを活用しようとする姿勢を芽生えさせた可能性がある。

6.5　異なる条件の二盗の問題作りとその解決

課題を自ら決定して解決することが刺激となって、生徒は数学の面白さや楽しさに気づき、数学のよさを実感したことを指摘している生徒がいることがわかった。

6.6　三盗や本盗の問題作りとその解決

問題作りでは、一人で何問も、三盗や本盗の問題を作った生徒もいた。生徒は皆、主体的に活動しており、夢中になって学習に取り組んでいた。

6.7　授業直後の生徒の感想

本授業の直後に、数学を活用して現実の世界の問題を解決することについて、生徒に感想を求めた。現実の世界の問題である盗塁が、本当に数学で解決できたことに、素直に驚き、数学の面白さが分かってきたと述べ、主体的な活動をし、楽しんだ様子がわかる。

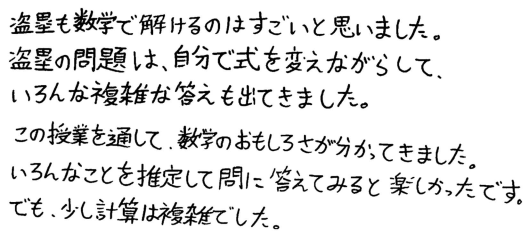

盗塁も数学で解けるのはすごいと思いました。
盗塁の問題は、自分で式を変えながらして、
いろんな複雑な答えも出てきました。
この授業を通して、数学のおもしろさが分かってきました。
いろんなことを推定して問に答えてみると楽しかったです。
でも、少し計算は複雑でした。

図 25 授業後の生徒Ａの感想

7　授業の考察

7.１　実験仮説１の考察

筆者のねらいどおりに、生徒は、盗塁が成功するかどうかを考えるような現実の世界の問題を、数学を活用して解決するためには、ベースを点とみなすことが必要であると感じ、定式化が非常に重要だと理解した。この理解があったからこそ、生徒は、その後の定式化も自発的に行った。これらのことから、定式化を丁寧に指導することが非常に重要であることが明らかになった。

7.2　実験仮説 2 の考察

筆者が設定した数学的モデルはあまりに単純化していて、現実的でないことに気づいたり、現実の場面では、常にとうぼ君が同じ速さで走ることは不可能であると解釈したりするなど、生徒は、現実の世界の盗塁の答えとして適切かどうかを判断する検証の必要性を理解するようになっていった。

検証の指導直後には、できる限り現実的な場面に近づけようとする生徒の試みが見られた。また、ほとんどの生徒は、さらに別の条件に変更した新たな問題を作り、現実の世界の盗塁として妥当かどうかも吟味する生徒の活動が見られた。

7.3　本授業全般の考察

生徒の多様な反応が引き出せた大きな要因として、生徒が多様な判断をしながら定式化したり検証できるような授業を計画したことである。これらは、生徒が数学的な解を解釈し、現実の世界の問題を検証する重要性をとらえるのに、有用な活動だったと考えた。また、VTR の活用も、生徒の視覚に訴えることができ、生徒の理解を深めるのに有用な教材となった。VTR１では盗塁の意味を理解するのに有効だったし、特に VTR2 では、生徒は、数学では捉えきれない、様々な変数があることに気づくことができた。本授業の検証の段階では、視覚に訴えることの重要性は明らかだった。