鳴門教育大学授業実践研究
－学部･大学院の授業改善をめざして－
第16号　2017

数学を学び続ける生徒を支える授業に関する研究
── 弓形の面積を求める問題を通して ──

梶浦　将良*，元山　　望*，西川　真由*
東　　祥喜*，安友　千絵*，米津　邦義*
秋田　美代**，佐伯　昭彦**，石川　和義***

（キーワード：生涯にわたる学び，関係の理解，モデル）

1．はじめに

知識基盤型社会を背景に，生徒達には社会で生き抜くための基礎的・基本的な知識・技能を確実に習得するだけでなく，習得した知識・技能を社会の発展のために役立てることが求められる。文部科学省（2007）の中で「知識・技能は陳腐化しないよう常に更新する必要がある。生涯にわたって学ぶことが求められており，学校教育はそのための重要な基盤である」と述べており，学校教育に対して，生涯にわたって学び続けられるように生徒を育成することを求めている。生徒が生涯にわたって，自分自身の力で学び続けていくことができるようになるためには，与えられた課題を教えられた通りの方法で解決できるだけでは十分ではなく，経験したことのない課題に対して自分自身で持っている知識や技能を活用して解決できる力を付ける必要がある。

本研究の目的は，生徒が生涯にわたって数学を学び続けられるようになることを目指し，数学を学び続ける生徒を支える授業のあり方を明らかにすることである。そこでは，中学２年生を対象として，生徒にとって面積の求め方が未知である弓形を題材に，知識と知識を意識して結びつけることの必要性を実感させる授業を構築する。さらに，実践を通して授業の効果を検証する。

2．生徒の現状と課題

Programme for International Student Assessment（PISA）は経済協力開発（OECD）が実施する国際的な生徒の学習到達度調査であり，義務教育修了段階の15歳児の生徒が持っている知識や技能を，実生活の様々な場面で直面する課題にどの程度活用できるかを評価する。PISA 調査（2003）における数学的リテラシーの結果では，日本の生徒の平均点は，国際的に上位に位置している。詳細な分析では，数学的プロセスの３つのカテゴリー「定式化」，「適用」，「解釈」のうち「解釈」の得点が相対的に低く，思考力・判断力・表現力等が大きく問われる自由記述式問題に課題があること，無答率が参加国平均15.6％に比べて23.7％と高く，問題解決への取り組み方に課題があること等が判明している。この課題の原因の一つとして，生徒の学習の仕方が数学を自律的に学び続けられるものになっていないという問題があると考えられる。

通常，数学の授業は，生徒に数量・図形についての規則，手続き，概念等を理解させた後，身に付けた知識・技能を使って練習問題を解かせるという流れで進められることが多い。練習問題で正解することだけを目的にするならば，公式や問題のパターンを記憶し，それらを使うことができれば対応ができ，テストでもある程度の高得点がとれる。公式や定式的な解法は，問題の正答を速く，正確に得るために大変役に立つ。しかし，公式や定式的な解法を覚えるだけでは，経験したことのない問題に対応するために数学を活用することはできにくい。数学を暗記の科目だと捉え，問題や問題の解決方法の背景にある数学を理解せずに暗記しようとする学習を重ねることで，生徒は知識同士が繋がらないまま学習内容を記憶の中に保持していることが考えられる。知識同士が繋がらないために，初めて見る問題に対しては，既習事項を結びつけることが困難で，解決の糸口を見いだせないことになる。また，複合問題，応用問題は，解くことができないことが考えられる。

3．数学を学び続けることについて

⑴　数学の特性に沿った学習

秋田（2015）は，算数・数学の研究・学習は，図１に示すような公理に基づく手法に沿って進められると述べている。

*鳴門教育大学大学院自然系コース（数学）
**鳴門教育大学自然・生活系教育部
***鳴門教育大学附属中学校

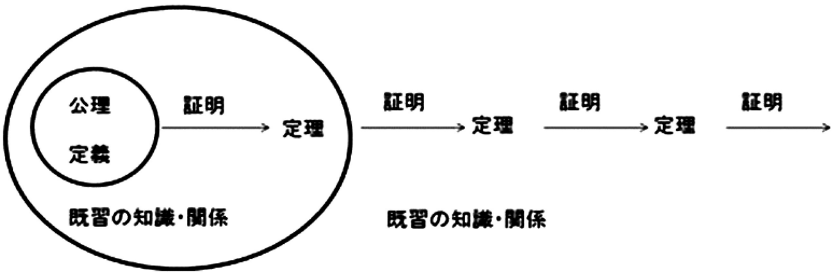

図１　数学の研究・学習における公理に基づく手段　出典：（秋田，2015 を改変）

数学では，数量・図形に関わる性質や関係について，定義・公理と呼ばれる正しいことを認める最小限の性質を基にして,新たな性質や関係が正しいかが既習の知識・関係を使って証明される。このことは，数学が系統性の強い学問である理由である。数学を生涯学び続けるためには，図１のような数学の特性を理解して，自分自身の力で新しい知識を創ったり，課題解決に取り組んだりしなければならない。秋田（2015）は，教員が図１に示す手法をはっきりと意識し，児童生徒がこの手法を使って自分自身で新たな知識を創れるように仕組まなければ，児童生徒に自律的に算数・数学の理解を深めさせることは難しいと述べている。生徒が自分自身で新しい知識を創っていくためには，数学の特性から学習内容同士の繋がりを理解していなければ困難であると考えられる。

スケンプ（1992）は，数学の理解には「道具的理解」と「関係的理解」の２種類があると述べている。「道具的理解」はなぜそうするのかという理由は分かっていないけども，規則に当てはめて結果を出すような場合であり,「関係的理解」はなぜそうするのか理由が分かったうえで，規則を用いることができる場合である。数学の特性を踏まえると，数学を生涯学び続けるためには「関係的理解」を目指していくことが重要である。

上で述べた生徒の現状と課題から，現在，生徒の多くは公式や定式的な解法に当てはめて結果を得ているだけの「道具的理解」の段階であると考えられる。「道具的理解」の段階では，経験したことのない問題に対して自分自身の力だけで取り組むことは難しいと考えられる。

数学の授業において，教員は生徒に解決方法の背景にある数学をはっきりと認識させて「関係的理解」の段階へ導くことで，経験したことのない問題に対して，解決の計画や方法を自らの力で考えていけるようにすることが重要である。そのためには，生徒に問題解決における既習の知識や関係の役割を意識させ，知識と知識を結びつけられるようにする必要がある。

⑵　知らないものを知っているものとして見る力

数学は，非常に系統性の強い学問であり，新しい知識を創ることは既習の知識を抜きにして考えることは難しい。秋田（2015）は，算数・数学は既習事項をモデルとして理解のベースに置く教科であると述べている。既習事項をモデルとして扱い新しい知識を創っていくために役立てていく必要がある。既習の知識を新しい知識を創るためのモデルにするには，それらの知識同士の間にある共通の性質や関係を見出す必要がある。

問題解決においては，問題の中に既習の性質や関係が見出せれば，既習の知識・技能を活用して解決方法を計画・実行できる。学校における数学の授業の中であれば,現在学習している内容に関わる問題が与えられるため，生徒は自分がどのようにして解決方法を決定しているか,あるいは決定しなければならないかをほとんど意識せず,問題解決を行っていることが推測できる。経験したことがない問題を解決する場合，問題の中にどのような既習の性質や関係があるのかを自分自身で見出す必要がある。経験したことのない問題の中に，自分が既に知っている性質や関係を見出せるかどうかが，問題解決の鍵である。言い換えると，問題解決においては，知らないものを自分の知っているものとして見る力が必要である。どのような既習の性質や関係を使うかは，問題に依存しているのではなく，問題を解決する者が見出す性質や関係に依存する。自分の知っているものとして見るとは，その具体的な対象の中にある数量，図形の性質や関係を抽象化し既習の知識との関連を見出すことである。このような見方ができたときに知識と知識が結びついていると考えられる。

数学の授業において，教員は生徒に問題を解決する際に，問題の中にどのような既習の性質や関係を見出したのかをしっかりと意識させて，自分が関係や性質を見つけることができたから思考・判断・表現できるのだと自覚できるようにすることが重要である。そのためには,生徒が意識して既習の性質や関係を見出さなければならない状況を設定する必要がある。

4.　数学を学び続ける生徒を支える授業

⑴　授業の構築

数学を学び続ける生徒を支えるには，今まで経験した

ことのない問題に対して，既習の知識・技能を活用して解決の計画や方法を自らの力で考えていけるようにしていくことが重要である。

上で述べた数学の特性等から，数学を学び続ける生徒を支える授業の構築においては，生徒に問題解決における既習の知識や関係の役割を意識させて知識と知識を結びつけられるようにすること，生徒が意識して既習の性質や関係を見出さなければならない状況を設定することが必要であると考えられる。そのため，次の①から③に重点をおいて授業を展開する。

① 生徒に，既習の知識・技能で解決できるが，既習の性質や関係を見出さなければ解決できない問題を与える。

② 解決方法を考えさせる際に，なぜこの問題がすぐには解決できないか，どのような問題であれば解決できるのかを考えさせる。

③ どのような見方で問題を見たから解決できたのかを考えさせる。

⑵ 教材開発

実践する授業では，既習の知識・関係の役割及び知っているものとして見ることの必要性を認識させるために，「生徒の既習の知識・技能で解決できるが，既習の性質や関係を見出さなければ解決できない問題」が必要である。教科書や参考書に掲載されている問題では，解き方を知っている生徒にとって，既習の知識・関係の役割や知っているものとして見ることの必要性が実感できないことが考えられたため，教材を新しく開発することにした。

開発した問題は，図２のような弓形の面積を求める問題である。

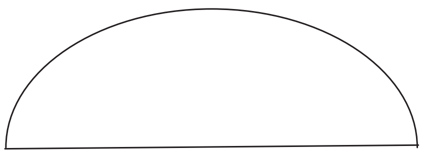

図２　弓形

弓形は，円の弧とその両端を結ぶ弦で囲まれた図形である。弓形は，小学校算数・中学校数学では扱われない図形であり，生徒にとって馴染みの少ない図形であるので，面積を求めた経験のある生徒はほとんどいないと考えられる。弓形の面積については，小学校で学んだ代表的な図形「正方形」，「長方形」，「三角形」，「平行四辺形」，「円」や中学校で学ぶ「おうぎ形」の面積を組み合わせることで求めることができるため，生徒の既習の知識で解決できる。

数学を学び続ける生徒を支えるには，今まで経験したことのない問題に対して，解決の計画や方法を自らの力で考えていけるようにしていくことが重要である。こういった生徒を育てるために，数学の授業で獲得した知識等を，先の学習の中で役立てて経験したことのない問題を解決したり，新たな知識を創っていく活動を取り入れた授業をしたりしていくことが大切だと考える。前述で述べたとおり数学は系統性の強い学問であり，既習の知識を結びつけて考えていく必要がある。したがって，生徒が自分自身で経験したことのない数学の課題に対して解決していくには，その問題の中から数学的な性質を抜き出すことで自分の知っているものとして見て，知識と知識を結びつける必要がある。

5. 授業実践について

⑴ 調査期間・対象等

授業の実践は，2016 年 12 月 12 日に行った。対象は，鳴門教育大学附属中学校の２年生 39 名である。実践の結果は，ワークシート及びアンケートなどで分析することとした。

⑵ 授業内容

授業実践では，開発した弓形の面積を求める教材について，図３のように長さを与えない問題として提示した。今まで生徒たちが学習していない弓形の面積の求め方について，小学校・中学校で学んだ数学の知識・技能に関係づけやすくなると考えたためである。

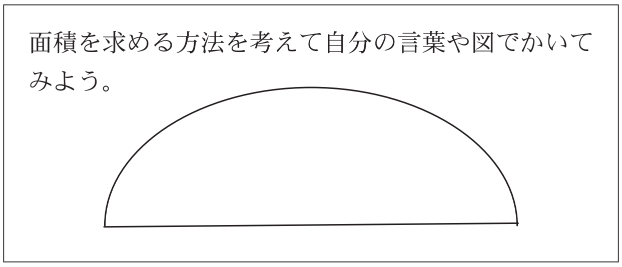

図３　生徒に与えた課題１

最初に，課題１として図３の問題を与え，弓形の面積の求め方を考えさせた。生徒達にとって弓形の図形は目にしたことがあっても，面積を求めたことはない図形である。

この問題は，中学校第１学年で学んだ作図を使って弓形から円を復元して，おうぎ形を見つけると，実測で求めた半径と中学校第１学年で学んだおうぎ形の面積の求め方で解決できるが，今回の授業では解決方法に焦点を当てたかったので，あえて実測はさせないで授業を構成することにした。既習の図形との関連を見出し，既習の知識と結びつけて考えることができるようにするために，弓形の面積を求める際に，弓形の中にどんな図形を用いて考えたかを着目させ，今まで求めたことのない図形の

面積を求めるために何が必要かを考えさせた。このことで，　今まで経験したことのない数学の問題を解決する際は，今まで自分が学習した知識と結びつける必然性があることを実感させ，知識と知識を結びつけることや新しいものを自分の知っているものとして見る大切さを実感させることができると考えた。

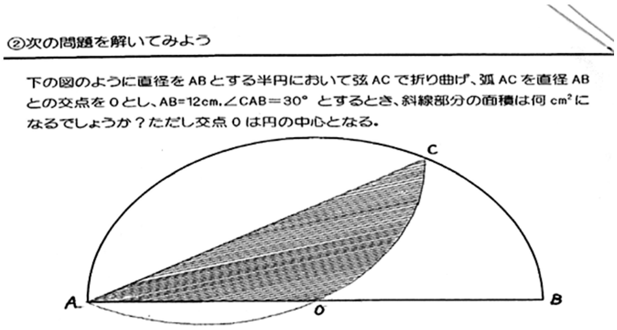

図４　生徒に与えた課題２

課題１が解決できた後，生徒に図４のような課題２を与え，課題１で学んだことを生かして面積を求めた経験のない図形の面積を求める活動を行うことにした。課題２では，多様な求め方が出てくると考えられるので，どのような既習の知識と結び付けてもよいことを生徒が実感できる問題であると考えた。課題２を解決する活動を通して，経験したことがない問題を解決するには，自分が知っている性質や関係を問題の中に見出して，それを活用して考える必要があることを，より実感させ，定着できると考えた。

6.　分析と考察

⑴　特殊な図形の面積を解く際に既習の知識と結びつける必然性の実感について

アンケート「今日学んだことをこれから活用していこうと思いますか？」の問いに対して全体（39人）の51％が非常に思う，46％がどちらかと言えば思う，3％がどちらかといえば思わないと回答していた。このことから，多くの生徒は，今まで経験したことのない問題に対して既習の知識と結びつけることの重要性を認識したことがうかがえた。

図５は，生徒の感想の例である。図５の感想からは，今日学んだことを次に生かそうとする態度が生まれていることが分かった。

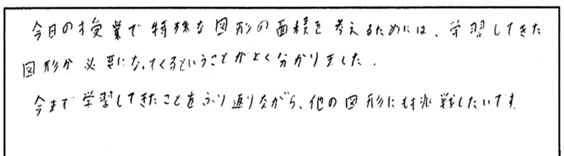

図５　生徒の感想の例

アンケートの結果及び生徒の感想から，生徒が問題解決において既習の知識と現在の課題を結び付けることの必然性を感じていることがうかがえた。

⑵　生徒の反応および授業の様子

課題１に取り組む際には，問題解決の方針が立てられない生徒が大多数であった。通常の授業の中では，数値の与えられた図形の面積を求める活動がほとんどであるためか，課題１のように，数値を与えられていない図形の面積を求めるための手がかりをつかめず，最初から手を動かしている生徒はほとんど見られなかった。

弓形は，円の一部であることは最初に説明していたこと，コンパスは用意させていたことがあり，弓形から円の復元を試みた生徒は多かったが，実際に解答までたどり着いた生徒は３人ほどであった。教材を開発した際に，解答例としては，小学校のときに円の面積の求め方を考えたときに使った，正方形に分割しておおよその面積を求める方法等も想定していたが，そのような考え方を使う生徒は一人もいなかった。

このことから，多くの生徒は，通常の数学学習を通して，弓形の面積を求めるために必要な力である円から扇形や三角形を見出す力は十分に育っていないと判断できた。教員が意識して，知らないものを知っているものとしてみる力の育成を図る必要があることが明らかになった。

今回の授業では，弓形のような生徒が経験したことがない図形の求積方法を考えさせたかったので，実測し実際の問題の数値を求めることはさせなかった。しかし，課題１を考える際にどのように求積方法を説明すればよいかが分かっていない生徒が多数いたことから，実際に実測して計算をさせていれば最初から手を動かして考えようとする生徒が増えたのではないかと考えられた。

また，授業を行う前は，生徒の半数以上は簡単におうぎ形を使って面積を求められることを予想していたが，実際は，ほとんどの生徒がおうぎ形を見いだせていなかった。生徒の状況に合わせると，50分間の授業では，見いだす作業に使う時間が少なかったことから，課題１でより時間をかけて，特殊な図形を求めるには既習の知識と結びつける必要があることを生徒自ら気付けるように授業の展開を改善していく必要があると感じた。

課題２に取り組む際には，生徒は課題１のときとは打って変わって，多くの生徒が手を動かして自分で解決方法を考えている姿が見られた。これは，普段解いている問題の形式により近いため生徒にとって考えやすかったのではないかと考えられた。また，活動１のときに今まで求めたことのない図形の面積を求めるときは，知っている図形を用いて考えることを学んでいたので，多くの生徒が知っている図形を用いて考えようとしていた。

課題１で学んだことを生かして課題２を解決してほしいと考えていたが，課題１では求積するために既習の図形である円を復元したのに対し，課題２では求積するために等積変形を主に使った。このことから課題同士の結びつきが弱く，生徒が問題を別物として見てしまい，課題１と課題２の共通性に気付きにくくなる場合が出かねないと考えられたので，より課題１と解決方法の共通性の強い問題を選択することが必要だと考えられた。

6. おわりに

本研究では，数学を学び続ける生徒を支えるために主に弓形の面積の求め方を考えさせる活動を通して，生徒が経験したことのない問題に対して既習の知識と結びつけることの大切さを実感できるような授業実践を行った。数学を学び続けていくためには，自分自身の力で新しい知識を創り課題解決に取り組んでいかなければならない。今回の一回の授業で学び続ける生徒を育てることは難しいことから，今後の取り組みとして，生徒が自分自身の力で新しい知識を創っていける教材を数多く開発する必要がある。

文献

秋田美代,「教科内容学を基にした教員教育の改善―数科専門と教科教育の役割について―」, 日本教科内容学会誌 Vol.1，pp.29 − 39，2015.

文部科学省，「初等中等教育分科会（第55回）・教育課程部会（第４期第13回）合同会議議事録・配付資料」，2007.
http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/siryo/07102505/003/003.htm

PISA 調査，TIMSS 調査の結果分析（中間まとめ)，2003.
http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/gakuryoku/siryo/05122201/014/001.pdf

R. R. スケンプ，「新しい学習理論にもとづく算数教育－小学校の数学－」，東洋館出版社，pp.65 − 81，1994.