鳴門教育大学授業実践研究
－学部･大学院の授業改善をめざして－
第17号　2018

不定方程式から派生した不等式を活用した正多面体の考察
── 生徒が主体的に活動する学習の事例研究 ──

長　尾　真　紀*，金　児　正　史**

（キーワード：正多面体，課題学習，異校種をつなぐ授業，オイラー数）

1．はじめに

筆頭筆者のこれまでの経験では，高等学校の学習指導は，生徒・保護者とも，上級学校への進学に向けた指導に対して期待が大きい傾向にあり，受験を視野に入れざるを得ない状況である。授業は，ほとんどの場合，進度を気にしつつ一方的に知識を伝達し，問題の解法を教えることに終始する一斉授業である。こうした授業に取り組む生徒の傾向として，次のような点が挙げられる。１つは，学習する動機が受験のため，という生徒が少なくないことである。問題のパターンを暗記することが学習と思い込んでいる生徒も見られ，問題が解けるか解けないかは，暗記の量によると考える傾向がある。２つめは，数学の学習について，生徒は内容・領域ごとの知識は理解でき，定着しているようでも，内容・領域を関連付けたり総合した学習内容になると力を発揮できないことである。見たことがあり，解いたことがある問題ならば解けるし，解こうとするが，そうでない場合は，解けない，または，解こうとしない実態もある。３つめは，生徒は，数学の授業中に学んだことがらを，数学の授業以外の場面で活用することができないことである。例えば，数学の授業中は，教科書に載っている問題を解くことができるが，他教科の授業で立式や計算が必要な場合，既習事項であってもすぐに対応できない。また，球技大会等の準備で全試合数を求める場合，数学の授業で学んだ組み合わせの知識が活かせるのに，そのことに気づかない[1)]。

筆者らは，上述した授業の実態や生徒の実態の検討を通して，筆頭筆者の授業では特に，生徒の主体的な学習を促そうとする視点や，内容を関連付けた授業の工夫が不十分であると考えた。そこで，筆者らは授業を改善する方策として，２点に注目した。１つは内容・領域を横断した学習指導を行うこと，２つめは日常生活や社会で数学を利用する活動を導入することである。このうち本研究では，内容・領域を横断した学習指導に焦点を絞った。その際，今回の高等学校学習指導要領で導入された課題学習を視野に入れて検討した。そして，正多面体を題材とする学習教材の開発と，その教材を用いた授業を行い，授業における生徒の活動の様子を捉えることにした。

2．研究の目的と方法

本研究の目的は２つある。１つは，生徒が主体的に取り組むような，内容・領域を横断した学習教材の開発と，その教材を用いた学習指導案を作成することである。２つめは，内容・領域ごとの知識を関連付けたり総合した学習内容には，生徒が主体的に学習しようとする可能性が高いことを明らかにすることである。

研究は次の手順で進めた。

課題学習の導入背景の研究調査

本研究の１つめの目的を明確にするために，現行の高等学校学習指導要領解説数学編理数編を利用して，課題学習の導入の背景を探った。併せて，課題学習を先行実施している中学校学習指導要領解説数学編（平成元年，平成10年，平成20年）も利用して，その導入の背景を探った[2)]。その際，久保ら（1994）による中学校教科書における課題学習の教材の実態調査も活用した。その結果，平成10年中学校学習指導要領解説数学編の課題学習の趣旨を参考にして，本研究では，課題学習を「生徒の主体的な学習を促し数学的な見方や考え方の育成を図るため既習の内容を総合した課題を設け，作業，観察，実験，調査などの活動を重視して行う学習」と定義した。

高等学校の課題学習の教材開発

高等学校の課題学習の教材や先行研究を研究調査した。また，「数学基礎」や「数学活用」，課題学習が位置付けられている「数学Ⅰ」と「数学A」の教科書を調査し，課題学習の学習内容を確認した[3)]。高等学校の課題学習の基礎的調査等については，佐竹ら（2014）を参考にした。また高等学校における課題学習の教材開発については，三島・松嵜（2015）や山田（2014）を参考にし，

*徳島県教育委員会
**鳴門教育大学　基礎・臨床系教育部

実践事例については青木・伊禮（2013）や田中ら（2012）を参考にした。しかしながら，先行研究の調査を通して，高等学校における課題学習について，十分な論文や文献がないことも明らかになった。そこで，中学校の課題学習の教材や実践事例，文献を調査することにした。中学校の課題学習の教材については，主にボールドら（1992）や飯島ら（1989）などの書籍[4]を参考にして，高等学校で活用可能な教材を検討した。その中で，内容・領域を横断した学習に，生徒が主体的に取り組む題材として，高等学校「数学 A」でも扱う，正多面体に関わる実践授業に着目し，青木・伊禮（2013, 再掲）や金児（2005, 2008）を参考にして，学習指導案を作成した。

学習指導案の作成

正多面体を題材とする学習指導案を作成した。その際，生徒が立体模型を作ったり，それを用いて，数学的な考察が深められるように配慮した。

授業の実践

作成した学習指導案に沿って授業を行った。授業時には，極力生徒の活動の様子を捉えるために，ビデオや IC レコーダを利用するとともに，事前・事後調査も実施して，分析・考察に活用した。

授業の分析と考察

授業後に生徒の活動を分析し，本研究の目的に照らして考察した。

3．本授業の概要

本授業の題材として正多面体を取り上げた理由は，内容・領域を横断でき，異校種（中学校・高等学校・大学）をつなぐ授業の展開が可能だからである。本授業では，最初に全生徒が正多面体の模型づくりを経験し，正多面体が５種類しかないことを帰納的に確かめる。その後，不等式を立式し，その整数解を導き，解釈することで，この事実を演繹的に捉えられるように計画した。筆者らは，生徒が模型づくりで確かめた事実を数学的に考察することで，驚いたり，確かめたいと感じると予想し，生徒の主体的な活動が大いに期待できると考えた。また，本授業の題材を扱う際に，作業や観察，議論などを重視して活発な活動になることも期待した。

なお，学習内容は，テーマごとに３つに分類し，合計４時間で計画した（表１）。本授業Ⅰは，中学校１年の空間図形，中学校３年の相似や二次方程式の内容・領域を横断した。本授業Ⅱは，数学Ⅰの因数分解，数学Ａの不定方程式や空間図形の内容・領域を横断した。本授業Ⅲはオイラーの多面体定理を導入して，大学で学ぶ位相幾何まで触れた。このように，中学校から大学までの学習内容をつなぐ授業を計画した。また，この計画のうち，高等学校の学習内容に直結するのは本授業Ⅱである。

表１　本授業の全体計画

本授業	学習内容
Ⅰ	正五角形の作図を考える
Ⅱ（１時間目）	正三角形でできる正多面体の種類を調べる
Ⅱ（２時間目）	正多面体が５種類しかないことを不等式を用いて証明する
Ⅲ	・正多面体が５種類しかないことをオイラーの多面体定理を用いて証明する ・オイラー数による立体の分類の考え方も学習する

⑴　本授業Ⅰの概要

本時の目標

［１］黄金比について理解できる。
［２］黄金比と正五角形について理解できる。
［３］無理数の長さの作図方法を理解できる。
［４］正五角形の作図ができる。

本時の学習

①黄金長方形の説明をして，黄金比を求める。
②黄金比と正五角形の関係を紹介する。
③正五角形の作図を考える。
④黄金長方形の性質に注目する。
⑤身のまわりにある黄金比や黄金長方形の話題に触れる。

⑵　本授業Ⅱ（１時間目）の概要

本時の目標

［５］正多面体の定義と正多面体が存在するための条件を理解できる。
［６］正三角形でできる正多面体の種類を調べることができる。

本時の学習

①多面体と正多面体の定義を提示する。
②立体[5]を，多面体や正多面体，曲面体[6]に分類する。
③正三角形でできる正多面体の種類の個数を，グループで予想する。
④正三角形でできる正多面体を作る。
⑤正三角形でできる正多面体は正四面体，正八面体，正二十面体の３種類であることを確認する。また，正多面体が存在するための条件を確認する。

⑶　本授業Ⅱ（２時間目）の概要

本時の目標

［７］正多面体をつくることができる正多角形が３種類しかないことと，正多面体は５種類しかないことを考察できる。
［８］２次不等式の整数解の意味を考察できる。

本時の学習

①正三角形以外の正多角形でできる正多面体を考える。
②正方形や正五角形，正六角形などの正多角形で調べて，正多面体が５種類であることを確認する。
③正多面体が全部で５種類しかないことを数式で確認する。
④数式の解を吟味して，正多面体が５種類しかないこと

を確認する。

⑷ 本授業Ⅲの概要

本時の目標

［9］オイラーの多面体定理を理解できる。

［10］オイラーの多面体定理を用いて，正多面体が5種類しかないことを証明できる。

［11］オイラー数を用いた立体の分類をとおして，新たな図形の特徴を知ることができる。

本時の学習

①オイラーの多面体定理を確認する。

②オイラーの多面体定理を用いて，正多面体が5種類しかないことを証明する。

③凸多面体[7]のオイラー数が2であるかどうか確認する。

④穴があいている立体模型を見せ，オイラー数が2になるかどうか調べる。

⑤立体図形のオイラー数を調べることで，立体を分類する考え方があることを紹介する。

本稿の最後に，資料として，本研究の本授業Ⅱ（1時間目）の学習指導案を示した。この授業では，最初に正三角形で構成される正多面体が何種類あるのか，生徒に予想させた。また模型づくりでは，デルタ六面体やデルタ十面体を作る生徒がいることを予想して，正多面体の定義との整合性を図る作業を，生徒に主体的に取り組ませようとした。さらに，1つの頂点に集まる正三角形の個数が何個のとき，正多面体の定義を満たしているか吟味し，正多面体が存在するための条件を，生徒に自ら発見できるように計画した。なお，この学習では，多様な生徒がいることを想定して，複線型の学習指導案を作成した。

4．本授業の実際

本授業は，次のように実施した。ただし，本授業Ⅲは2時間で実施する計画に修正して，計5時間の授業を行った。

本授業は，課題学習を意図して指導計画を作成したが，この授業実践は，生徒が不定方程式を学習する前に実施せざるを得なかった。そのため本授業Ⅱ（2時間目）では，不定方程式の指導も，並行して行うことになった。このことから，この授業実践では，本授業を課題学習として位置づけることができなかった。しかし，生徒の活動は活発で，課題学習への展開の可能性を実感した。

実施時期：2015年4月～5月，9月～10月

対象学年：高等学校1年

対象生徒：普通科2クラス，応用数理科1クラス（各クラス40名）[8]

授業では，3クラスとも同様の反応があったが，応用数理科では，より多様な反応が見られた。そこで本研究では，応用数理科における，本授業Ⅱの授業の実際やその分析・考察に焦点を絞る。

⑴ 本授業Ⅱ（1時間目）

① 多面体と正多面体の定義の提示

正多面体について，知っていることを生徒に聞くと，数名の生徒から，定義の一部と全ての正多面体の種類について発言があった。他の生徒は，この発言に驚き，拍手が起こった。次に，正多面体にこだわらず，知っている立体の名称を挙げるよう生徒に指示した。立方体，三角錐，直方体，球，四角錐，円錐，円柱などが挙げられた。それらの立体模型を黒板に掲示し，正八面体と正十二面体を追加した。その後，多面体の定義と正多面体の定義（凸多面体のうち，「各面はすべて合同な正多角形である」「各頂点に集まる面の数はすべて等しい」），曲面体の定義を口頭で説明した。

② 立体の分類

黒板に掲示した立体模型を1つずつ，多面体と正多面体，曲面体の定義を確認しながら分類した。そして，今日の授業は，正三角形でできる正多面体に話を絞ることを伝えた。

③ 正三角形でできる正多面体の種類の予想

図1　正三角形でできる正多面体の検討

生徒に，4人グループになるように指示した。各グループに，画用紙でできた，合同な正三角形50枚を配布し，正三角形でできる正多面体が何種類あるかを予想して，黒板に記入するように指示した。生徒は，正三角形を並べたり組み立てたりして，相談していた（図1）。予想する正多面体は何種類か，質問すると，「2種類」が3グループ，「3種類」が5グループ，「たくさん」は2グループだった。何を根拠にして予想したかを問うと「勘。」「直感。」と発言があった。もう一度，正多面体の定義を確認した後，予想を変更してもよいと伝えた。「たくさん」と予想したうちの1グループだけが，「5個以下」に変更した。変更した理由を聞くと，授業の最初で，正多面体は全部で5種類あるという発言を思い出したから，とのことだった。

④ 正多面体づくりによる確かめ

正三角形をセロテープで貼り合わせて正多面体を作り，予想が正しいか確認するように指示した。また，作りながら，正多面体が存在するための条件も考えるように指

示した（図２）。

図２　正三角形でできる正多面体づくり

予想通り，複数のグループがデルタ多面体を作っていた。そこで，これらの模型をクラス全体に見せながら，正多面体かどうか質問した。「正多面体。」「違う。」「１つの頂点に集まる面の数が，３つと４つのときがあるから違う。」などの発言があった。この立体をデルタ多面体と定義した後，再度，正多面体の定義を確認して模型を作るように指示した。また，別のグループが正三角形を６個貼り合わせて正六角形を作っていたので，それもクラス全体に見せながら，正三角形が６個集まると平面になり，立体にはならないことを確認した。正多面体ができたグループには，正多面体が存在するための条件を考えるように促した。

⑤　正多面体が存在するための条件の確認

正多面体が存在するための条件（「多面体の１つの頂点に集まる面の数は３以上である」「凸多面体の１つの頂点に集まる角の大きさの和は360度より小さい」）を２つとも導いていたグループがあったので，発表してもらった。発言を聞いていた他の生徒は，理解できた様子で，ワークシートに記入していた。そして，正三角形でできる正多面体は正四面体，正八面体，正二十面体の３種類であることを確認した。さらに，正三角形以外の正多角形でも同様に考えられることを伝えた。作った正多面体やデルタ多面体の模型は，後の授業（本授業Ⅲ）で使うことを予告して，回収した。

図３に，本授業Ⅱ（１時間目）の板書計画を示す。なお，実践した授業では，この板書計画通りに板書した。

⑵　本授業Ⅱ（２時間目）

①　正三角形以外の正多角形でできる正多面体

前時で学習した，正三角形でできる正多面体の種類は３種類であることや，正多面体の定義及び，正多面体が存在するための条件を確認した。その後，正三角形以外の正多角形でできる正多面体について，模型を使わずに調べることを伝えた。

②　正多面体が５種類であることの確認

生徒にワークシートを配付して，正多角形を正ｎ角形とおいて，ｎ＝４すなわち正方形のとき，正多面体が何種類できるかを，正多面体が存在するための条件をもとにして，考えるように指示した。正方形の１つの内角の大きさと正多面体が存在するための条件から，１種類しかできず，それは，正六面体（立方体）であることを納得していた。同様に，ｎが５以上の整数の場合を考えるように指示した。そして，それぞれの場合について，正ｎ角形の１つの内角の大きさはどうなるか，その場合は正多面体ができるか，そう考えた理由は何か，などを質問した。その結果，正多面体は正方形と正五角形でそれぞれ１種類，全部で５種類であること，正三角形，正四角形，正五角形以外の正多角形では正多面体はできないことを確認した（図４）。次に，６種類目の正多面体がないことを，不等式を用いて確認することを伝えた。

③　正多面体が５種類しかないことの確認

生徒に，正ｎ角形の内角の和を，ｎを用いて表すと，どうなるか質問した。生徒からは「180(n－2)度。」の発言があった。続いて，正ｎ角形の１つの内角の大きさを

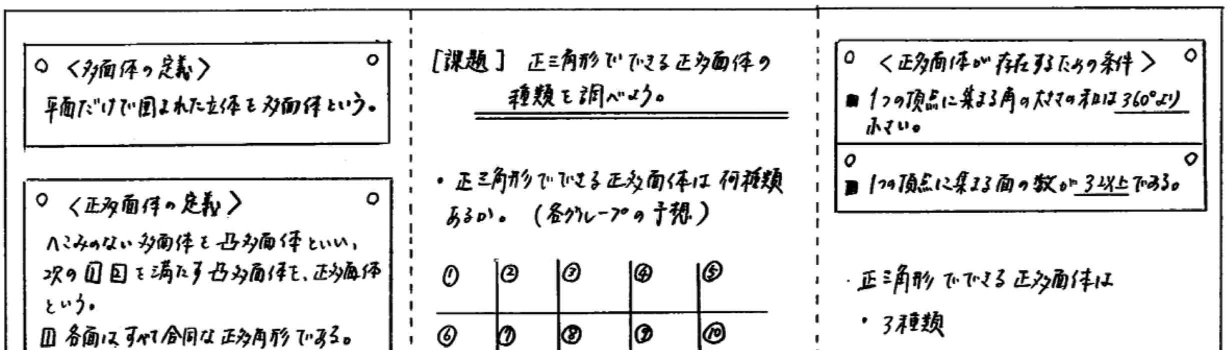

図３　本授業Ⅱ（１時間目の板書計画）

(1) 正多面体の種類
正三角形でできる正多面体(　　　)種類
正方形でできる正多面体(　　　)種類
正五角形でできる正多面体(　　　)種類
→正多面体は全部で(　　　)種類である.
(2) (1)を確かめよう
1つの頂点に正n角形がm個集まっている正多面体を考える.

図4　ワークシート（表面）の問題

[問1] n, mの2次不等式(∗)の不等号(<)を等号(=)に変えて，2次方程式を作ります.
この方程式を解いてみましょう．得られた解からどんなことがわかりますか？
[問2] n，mの2次方程式が表す意味について考えてください．1つの頂点に正 n 角形を m 個集めて(　　　　　　　　).

図5　ワークシート（裏面）の問題

質問した。「nで割る。」と発言があり，$180(1-\frac{2}{n})$度となることを確認した。次に，1つの頂点に，正n角形がm個集まったときを考えるように促した。そして，正多面体が存在するための条件より，不定方程式[9]から派生した不等式を作るように指示した。その結果，生徒は，

$180(1-\frac{2}{n})m < 360 \cdots (*)$

を導いた。筆頭筆者は，式(∗)を変形して

$nm-2n-2m<0$

とし，生徒の様子を確認しながら，不等式

$(n-2)(m-2)<4 \cdots (**)$

を導いた。筆頭筆者は，n，mとも3以上の整数であることを，生徒に意識させ，この不等式の整数解を求めるよう促した。なお，2次不等式と不定方程式の整数解については未習だったため，少しずつ説明しながら進めた。生徒は説明を聞きながら，

$(n-2, m-2)=(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1)$

となることを自ら発見したり，筆頭筆者の説明によって理解して，

$(n, m)=(3,3),(3,4),(3,5),(4,3),(5,3)$

の5組の解を求めた。

この場面では，生徒が主体的に活動していたとは言い難かった。しかし，正多面体が5種類しかないことを不等式を用いて解決する活動では，生徒から疑問や質問もなく，生徒は的確な学習活動を行っていた。

④　不等式の解の吟味

生徒は不等式を解いて5組の整数解を得たが，この解が何を意味しているかはわかっていない様子だった。筆頭筆者は，整数解が5組得られたことにより，正多面体が5種類しかないこと，つまり，正三角形は(3, 3)，(3, 4)，(3, 5)の3種類，正方形は(4, 3)の1種類，正五角形は(5, 3)の1種類できることがわかったことを説明した。すると生徒は「そういうことか。」と納得していた。

余裕がある生徒には，ワークシート裏面の［問1］に取り組むように促した(図5)。これは，不等式の不等号が等号になった場合の不定方程式の整数解を求める問題である。さらに，不定方程式から得られた整数解の吟味を通して，1つの頂点に正n角形をm個集めた敷き詰めになることを，考えさせる問題（［問2］）も与えた。

5．授業の分析

本授業から，2つの事象が得られた。1つは，生徒が立体模型，正多面体の定義，正多面体が存在するための条件，立式した不等式を互いに往還することによって，正多面体の定義や正多面体が存在するための条件の理解を深めたことである。2つめは数学化された数式を解くことはできても，その解の吟味が適切に行えないことが明らかになったことである。

⑴　正多面体の模型づくり

本授業Ⅱ（1時間目）の授業では，合同な正三角形でできる正多面体を作成する活動を行った。この場面では，生徒は正多面体の模型づくりに行き詰まると，正多面体の定義に戻って確かめる活動が非常に活発に見られた。次のプロトコルは，デルタ六面体が正多面体かどうか，2名の生徒が確認をしている場面である。

01[S1]　えっ，これ(自分たちが作ったデルタ六面体)ってほうなん（そうなの）？
02[S2]　これって多分ほうやし（そうだし）。
03[S1]　正四？
04[S2]　えっ？　1，2，3，・・・
05[S1]　正多面体？
06[S2]　ちょっと待って！　1，2，3，・・・
07[S1]　頂点に集まる数はすべて等しい。
08[S2]　1，2，3。1，2，3，4！
09[S1]　あっ！4つある！
10[S2]　ありゃー。あかんかった。
11[S1]　えー。じゃ，どんな形だっけ？

（プロトコルの括弧内は，筆者らによる補足である。）

生徒はデルタ六面体の模型を手にとり，正多面体の定義「各頂点に集まる面の数はすべて等しい」を言い（07［S1］)，定義通りになっているかどうか確かめている（04［S2］，08［S2］)。その結果，デルタ六面体が正多面体でない（10［S2］）ことを確認した。他のグループでも，正多面体の模型づくりとその確認が活発に行われていた。特に正二十面体の作成では，正多面体が存在

するための条件「凸多面体の１つの頂点に集まる角の大きさの和は360度より小さい」の確認も行いながら，模型づくりをしていた。このように，この学習場面では，ほとんどの生徒が正多面体の定義に照らし合わせて，主体的に模型づくりをしていた。また，作った模型が正多面体かどうかを確認しながら，正多面体が存在するための条件を明らかにする活動も活発に行われていた。

正三角形を使って正多面体を作る活動の時はあまり正多面体が存在するための条件について考えていなかったが、数式などでいろいろと調べていくととてもわかりやすかった。

図６　授業後の生徒の感想

図６は，本授業Ⅱ（２時間目）の授業直後に行った事後調査の，授業の感想欄に記された生徒のコメントである。この生徒は，立体模型づくりの時には，正多面体の定義や，正多面体が存在するための条件に，どのような意味があるのか考えつかなかったようである。しかし，立式した不等式（＊）の意味や，不等式に用いられている文字の意味を吟味・検討する過程で，正多面体の定義や，正多面体が存在するための条件を的確に捉えたことを述べている。この生徒は，正多面体の模型づくりの作業と，数学的考察の関連性をとらえ，数式の処理を行っていると推測できる。同様の反応は，他の生徒の記述には見られなかったが，正多面体の立体模型，その定義，条件，不等式を互いに往還することで，この生徒が主体的に正多面体の理解を深めていたことが窺える。

⑵　不等式の解の吟味

本授業Ⅱ（２時間目）では，不等式を用いて正多面体が５種類しかないことを証明する学習を行った。この学習では，半数ほどの生徒しか自力で立式できなかったが，不等式の意味を理解してからは，多くの生徒がその不等式を意欲的に解き，５組の自然数解を導いていた。しかしながら，４⑵④で述べたように，これらの解の吟味を自力でできる生徒はほとんどおらず，筆頭筆者の解説によって，不等式（＊＊）の解の意味を理解する状況だった。数学的解答を求めることができても，それが，正多面体が５種類しかない事実の検証の材料として活用できない生徒が非常に多いことがわかった。

６．考察

筆者らが当初計画した学習指導案では，生徒が不定方程式を学習し終えた段階を想定していた。しかしながら，本授業は，生徒が不定方程式を学習する前に，授業実践することになった。そのため，本授業Ⅱ（２時間目）において，特に正多面体が５種類しかないことを，不等式を用いて考察する学習展開の場面では，未習の学習内容の指導を，スモールステップで構成して，筆頭筆者の指示や説明が中心となる学習指導にした。それでも生徒は，正多面体が５種類しかないことを，作成した模型を用いた具体的な操作を通して，積極的に確認していた。生徒の主体的な活動の様子から類推すると，実施時期を当初の予定通りに変更できれば，課題学習としての学習が十分に見込めると考えている。

本授業が課題学習となり得るのかどうか確認するためには，不定方程式の学習直後に，当初計画した本授業Ⅱの学習指導案に沿って，本授業を実施する必要がある。その際には，生徒が主体的に多様な活動を行う授業が展開できるよう，筆頭筆者の力量を高めておくことが必要である。

生徒の反応から，高等学校の教師は，生徒が主体的に取り組むような，内容・領域を横断した学習教材の開発とともに，実施時期も検討しつつ，普段の授業でも，生徒が主体的に学習する場面を多く取り入れた授業に，慣れていくことも必要だと痛感した。換言すれば，生徒が主体的に取り組むような，試行錯誤を必要とする教材や発問を開発・工夫したり，それらをどのように学習指導案に組み込むと効果的なのか，検討することが，今後は重要である。その際，生徒が思考したり，感動したり，問いを立てたり，既習の知識を活用する経験を，増やそうとする教師の意識が欠かせない。前述したように，高等学校における課題学習の実践事例はまだ多くない。しかしながら，中学校で先行実施されている課題学習の教材や授業の事例を参考にし，高等学校の学習内容に関連付けることを意識すれば，高等学校用の多くの課題学習の教材が開発できる可能性が高い。

また，本授業によって，生徒の実態を改善する糸口も見いだすことができた。高等学校における授業で，問題の解法を教えることに終始するような一斉授業が多く行われるとしても，少しずつでも，関連する学習内容を横断した学習を継続して導入できれば，高等学校の生徒の関心意欲は，日頃の授業の中でも高められると考えている。

さて，本授業では，中学校１年や数学Ａで学習する正多面体と，数学Ａで学習する不定方程式から派生した不等式を，関連付けて学習することを計画した。正多面体が５種類しかないことを，不等式を用いて証明しようとするような，これまでに取り組んだことのない問題でも，生徒の解決しようとする強い意識や姿勢が見て取れた。上級学校への進学を意識し，問題の解法を学ぶことに終始することが多い生徒でも，学習の目標を的確に伝えて，彼らの知的好奇心を刺激することができれば，数学の授業で学んだことを，他の場面でも活用しようとする生徒が増えていくと見込まれる。こうしたことから，内容・

領域を横断した学習内容を適切に扱えば，生徒が主体的に学習する可能性が高い。

今後は，他の２クラスで行った授業の状況を分析・考察して，本授業をよりよいものにする。また，日常生活や社会で数学を利用するような課題学習の教材開発を行い，授業も実践して，その分析・考察を行う。また，本授業を，不定方程式の学習直後に実施して，課題学習として有効に活用できるかどうかも検証する。

註

1）授業や生徒の実態は，中央教育審議会（2014）「新しい時代にふさわしい高大接続の実現に向けた高等学校教育，大学教育，大学入学者選抜の一体的改革について－すべての若者が夢や目標を芽吹かせ，未来に花開かせるために－（答申）」(p.4) や国立教育政策研究所　教育課程研究センター（2013）「特定の課題に関する調査（論理的な思考）調査結果～21 世紀グローバル社会における論理的に思考する力の育成を目指して～」(p.40，68，143，144，155，156，163）に，同様の報告がある。

2）平成元年版は「中学校指導書数学編」が正式の名称である。

3）「数学基礎」(実教出版，旺文社，東京書籍（いずれも 2003）数研出版（2006)），「数学活用」(実教出版，啓林館（いずれも 2012)），「数学Ⅰ」(第一学習社，実教出版，啓林館，数研出版，東京書籍（いずれも 2012)），「数学A」(第一学習社，実教出版，啓林館，数研出版，東京書籍（いずれも 2012)）を参照した。また未来へひろがる数学 1，2，3（啓林館（2012)）も調査した。

4）他に『CRECER（クレセール）中学校数学科教育実践講座第 11 巻　問題解決・課題学習』(1995)，『中学校新数学科　活用型学習の実践事例集』(2010)，『中学校・新しい授業２　数学科課題学習の教材集』（1991）等を参考にした。

5）本研究では，教科書等の表記を尊重して，立体や立体模型，多面体，正多面体等の用語を用いるが，いずれも閉曲面を意味する。中身が詰まっていない立体である。

6）改訂増補　新数学辞典（一松信・竹之内脩編，大阪書籍（1998)）では「空間の立体図形で，曲面で囲まれたものを**曲面体**という。(p.309)」と定義している。また，さらに円柱や円錐，球も，次のように定義している。「**円柱**　平面 α 上に円を１つとり，α と平行でない直線 l を１つ定める。円上の点を通り l と平行な直線全体の集合は１つの曲面を作る。この面を α と平行な平面 β で切ると，切り口は α 上の円と合同になる。α と β ではさまれた曲面と，α，β 上の２円板を合わせた曲面を**円柱**という。**円錐**　平面 α 上に円をとり，α 上にない点Ｏと円上の点を結んだ直線の集合を**円錐**という。**球**　空間に１点Ｏをとり，Ｏから一定の距離にある点の集合を**球**，または**球面**という。(p.309)」

7）閉曲面を考える場合，凸な閉曲面である必要はないが，教科書の表記を尊重している。

8）応用数理科は，理数科目に興味・関心が高い生徒が集まっているクラスである。

9）図５の［問１］で立式する $180(1-\frac{2}{n})m = 360$ のことである。

引用・参考文献

青木慎恵・伊禮三之（2013）「数学Ａの課題学習の事例研究」福井大学教育実践研究第 38 号，pp.91 － 100

ブライアン・ボールト／デビッド・ハッブズ著・長崎榮三・森園子訳（1992）『中学校　こんな数学やってみませんか　101 の課題』東京書籍

飯島忠・吉田稔（1989）『話題源数学』とうほう

金児正史（2005）「オイラーの多面体定理」数学教育№. 568，pp.55 － 59．明治図書

金児正史（2008）「模型づくりを通して５種類の正多面体を発見する」数学教育№. 606，pp.62 － 65．明治図書

久保良宏・久永靖史・椛元新一郎・長崎栄三（1994）「中学校数学科教科書における課題学習の現状と今後のあり方」日本数学教育学会誌第 76 巻第７号，pp.36 － 40

三島直人・松嵜昭雄（2015）「「90°　システム広告」の作図方法に着目した数学教材」日本数学教育学会誌第 97 巻第９号，pp.13 － 21

文部科学省（2008）『中学校学習指導要領解説数学編』教育出版

文部科学省（2009）『高等学校学習指導要領解説数学編　理数編』実教出版

文部省（1989）『中学校指導書数学編』大阪書籍

文部省（1999）『中学校学習指導要領解説数学編』大阪書籍

長尾真紀（2016）『高等学校数学科における課題学習の意義の検証－不定方程式を活用した正多面体の授業実践－』鳴門教育大学教職大学院最終成果報告書

佐竹郁夫・風間喜美江・豊田稔・杉本紘野（2014）「高等学校数学「課題学習」の教材開発について」香川大学教育実践総合研究 28，pp.45 － 58

田中伸明・森西基雄・傳道政男（2012）「体験を通して学ぶ高等学校数学科の「課題学習」」三重大学教育学部附属教育実践総合センター紀要第 32 号，pp.29 － 34

山田潤（2014）「60°　の角をもつ３辺の長さが整数の三角形」日本数学教育学会誌第 96 巻第７号，pp.2 － 10

資料　本授業Ⅱ（1 時間目）の学習指導

（「」内は発問で，主たる発問はゴシックで示した．）

	授業の流れと発問	生徒の反応と教師の動き
導入 5分	1　**本時の学習内容について説明する。** 立体図形の中の正多面体について学ぶことを説明する。 **「正多面体とは，どのような立体のことか具体例を知っている人は？」** いる場合　　いない場合 「他には？　全部でどのくらいあるのでしょうか。」	・正四面体や立方体の名前があがる。 ・全部でなくてよい。 疑問を投げかける程度にする。
展開 10分	2　**立体を分類する。** (1) 正多面体にこだわらず，思いつく立体の具体例をいくつか出す。 **「知っている立体の具体例を挙げてください。」** 大体でたところ　または　全くでない場合 用意した立体模型を見せる。	・生徒に発表してもらう。 角柱，円錐，球などが出る。 ・他にもあることを思い出す。 ・見せる正多面体は，正六面体，正八面体，正十二面体とする。
	(2) 立体を正多面体，多面体，曲面体に分類する。 「多面体と正多面体の違いを知っている人はいますか？」 定義をする。 ［多面体の定義］ 平面だけで囲まれた立体を多面体という。 ［正多面体の定義］ へこみのない多面体を凸多面体といい，次の①，②を満たす凸多面体を正多面体という。 ①各面はすべて合同な正多角形である。 ②各頂点に集まる面の数はすべて等しい。	・知っている生徒がいれば説明を促す。 ・定義はあらかじめシートに記入しておき，黒板に貼る。
	分類する。 (1)の立体模型を，正多面体，多面体，曲面体に分類する。	・生徒に分類してもらう。

		※曲面体とは，空間の立体図形で曲面で囲まれたもの(球も含む) ・定義の定着を確認する。 ・模型を片付ける。
8分	3　正多面体に話を絞る。正三角形でできる正多面体を考える。 「今から，正多面体について調べていきます。」 「定義①から，正多角形の中で内角が最も小さい図形，すなわち正三角形でできる正多面体を考えていきます。」 課題を提示する。	
	課題　　正三角形でできる正多面体の種類を調べる。	・課題を板書する。
	正三角形でできる正多面体の種類(個数)を予想する。 (1) 4人で1グループ，計10グループに分かれる。 (2) 正三角形の用意をする。	・ここからグループ活動にする。 グループは授業前に知らせておく。
	事前に時間がとれる場合 各グループに画用紙を配布する。 課題として，正三角形を作ってくるように指示しておく。 [1辺9cmの正三角形を，できるだけ多く作ってくること] 事前に時間がとれない場合 用意していた正三角形(1辺9cm，50個程度)を各グループに配布する。	・事前に時間がとれる場合，何枚作ったか，苦労したことは何かなど，グループごとに発表してもらう。
	(3) 正三角形でできる正多面体が何種類あるかをグループで予想する。 「これから正三角形でできる正多面体をつくります。」 **「予想では，何種類できると思いますか？」**	・話し合いの結果，何種類となったかを黒板に書く。
	定義②を確認する。 黒板に書いた予想の個数をもう一度確認する。 「個数を変更したいグループがあれば，変えてもいいですよ。」	・話合いを促す。

	↓ 変えたグループがある場合　　　　変えたグループがない場合 「変えようと思った理由は？」 ↓ 「個数に自信があるというグループは？」 ↓	・訂正する場合は，色を変えたチョークを使用する。 ・変更または自信ありのグループには説明をしてもらう。
20分	4　具体的に調べる。 (1) 実際に正三角形でできる正多面体を作る。 各グループにセロテープを配る。 「正三角形をセロテープで貼り合わせて，正多面体を作りましょう。」 ↓ しばらくして 「正多面体とは，どのような立体図形のことでしたか？」 **「今作っているのは，本当に正多面体ですか？」** ↓	・机間指導しながら様子を見る。 ・デルタ多面体などを作っているグループがあるかもしれない。 ・定義を確認させる。
	(2) 正多面体が存在するための条件を考える。 ワークシート①を配布する。 「各グループで，正多面体が存在するための条件を考えましょう。」 ワークシート①(1) に記入するように指示する。	・作りながら気づいたことをワークシートに記入するように指示する。 ・ヒントなしでどのように考えるか様子を見る。
	話合いが進んだ場合　↓　話合いが進まない場合 「定義②から，各頂点に集まる面の数に注目しましょう。」 ↓　　↓ 考えにくそうであれば **「1つの頂点に集まる正三角形の数は何個考えられますか？」** まず平面にしきつめる場合で確認する。 **「1つの頂点に集まる正三角形の最大数は何個ですか？」** ↓ 「1つの頂点に正三角形が2個のとき立体はできますか？」 「どうして？」 「では，ここから立体にする場合はどうすればいいですか？」 ↓ 「1つの頂点に集まる面の数がどうなればいいですか？」 「では，1つの頂点に集まる角の大きさの和はどうなればいいですか？」 ↓	・説明がピンとこないようであれば，黒板に正三角形を貼って見せる。 ・最大数は6個とすぐにわかる。 ・気づかない場合は，正三角形を1個取って立体的に見せる。 ・3個以上5個以下と気がつく。 ・記入しているグループに発表して

	ワークシート①(1) 正多面体が存在するための条件　への記入を促す。	もらう。
5分	まとめる。 [正多面体が存在するための条件] ◇ 1つの頂点に集まる角の大きさの和は 360°　より小さい。 ◇ 1つの頂点に集まる面の数が 3 以上（5 以下）である。	・あらかじめシートに記入しておき，黒板に貼る。(別々に記載しておく) ・ワークシート①(1)に記入する。
	作った立体を確認する。 「正三角形でできる正多面体は何種類になりましたか？」 「また，正何面体ができましたか？」 正四面体，正八面体，正二十面体の 3種類しかないことを確認する。	・ワークシート①(2)に記入する。
	作った正多面体は，グループごとに回収し，次々回の課題学習Ⅲで利用することを予告する。	・時間内に作業が終わらなかったグループは，次回までの課題とする。 ・時間が余ったグループは，正三角形の他に何があるか，何種類あるかを考えるように指示する。
まとめ 2分	5　1時間の振り返りをする。 ワークシート①を見ながら，学習内容を確認する。	
	次回，他の正多面体について調べることを予告する。 「正多面体を作ることができる正多角形は，正三角形の他に何があるか，何種類できるか，を次回考えたいと思います。」 「今日と同じように考えれば，残りの正多面体についても求めることができます。ぜひ，やってみてください。次回の授業で聞くので，わかったことを教えてください。」	・希望者がいれば，画用紙または正方形，正五角形の型紙を渡す。 ・ワークシートは回収する。