鳴門教育大学研究紀要
第30巻　2015

科学・技術者の卵を育成する「科学・技術者の発掘・養成講座」の展開

── 数学領域におけるプレマスターコースの学習内容 ──

金　児　正　史*，成　川　公　昭**，平　野　康　之**

（キーワード：科学・技術者の卵を育成する「科学・技術者の発掘・養成講座」，プレマスターコース，定義，定理）

1　はじめに

平成25年度 JST の委託事業「次世代科学者育成プログラム（メニュー B)」として採択された「科学・技術者の発掘・養成講座」～徳島から育てよう未来の科学・技術者を～（以下，科学・技術者の卵を育成する「科学・技術者の発掘・養成講座」）は，徳島県下の教育委員会，学校，地域の関係機関や科学・技術者等の専門家が密接に連携し，小学生（５，６年生）と中学生を対象に２年間で修了する３段階[1]のステップアップコースを設定し，平成25年度は，各領域（数学，物理，生物，化学，技術工学，情報，脳科学）のスタンダードコースを実施し，報告している[2]。平成26年度は，スタンダードコースの修了生（55名）からプレマスターコースに選抜された34名の受講生を，希望する領域に配属した。そして受講者が自ら考え，手を動かし，広い視野から探究し，成果を伝えるコミュニケーション能力をはぐくむ体系的なカリキュラムを実施している。数学領域には，３名が受講している。

本研究では，平成26年５月から８月に実施した，数学領域における学習内容の概要を示すとともに，それぞれの学習における受講生の達成状況について報告する。

2　科学・技術者の卵を育成する「科学・技術者の発掘・養成講座」の計画概要

本学は十数年来，教育委員会，理数・技術の学校教員，企業，徳島県内大学の理系教員等と連携し，児童生徒の個に応じた発展的な学習の経験や興味・関心を助長する，科学・技術の魅力を体験する場を提供して，地域の理数・技術化教育の発展に寄与してきた。それらの経験を通して，数学・科学，技術領域に強い意欲と才能を有する子供の才能を発展継続するには，単発的な取り組みでは不十分だと考え，産学官民が連携する団体「サイエンスクラブ in 徳島」を平成24年に立ち上げ，卓越した科学・技術系人材の育成を継続的に推進できるシステムの構築を進めている。平成25年度は，科学・技術者の卵を育成する「科学・技術者の発掘・養成講座」は JST 委託事業として，徳島県内から選抜した受講生55名に対しスタンダードコースを実施した[2]。平成26年度は本学プロジェクトとして更に発展させ，スタンダードコース修了生（55名）からプレマスターコースに34名が選抜され，受講生の希望に基づき，技術，情報，数学，化学，生物，物理の各領域に配属し，個々に研究を進めた。現在プレマスターコースを修了し，９月から最終ステップのマスターコースを推進している。

3　数学領域の講義の概要

数学領域のプレマスターコースの学習は平成26年８月までに５回実施し，90分授業10回分の講義を行った。プレマスターコースの数学領域を希望する受講生は中学校１年生，２年生，３年生各１名，合計３名である。受講生が学校教育で学んだ既習内容は，講座が開始される平成26年５月の時点で，実質的に小学校６年から中学校２年である。この現状を踏まえて，筆者らは事前打ち合わせで，受講生３名の既習内容を再確認するとともに，あまり無理がない範囲で，どの教材を扱うことが可能か十分に検討し，プレマスターコースの講義内容を吟味した。なお，指導計画の作成にあたっては，受講生が可能な限り数学を作り上げていく過程を経験できるように配

*鳴門教育大学教職実践力高度化コース
**鳴門教育大学自然系コース（数学）

慮した。そこで，数学の用語は明確に定義し，既習の数学的な性質でも，可能な範囲で証明して定理にするなど，数学の体系を体験できるように計画した。その上で，プレマスターコースでの指導内容を２つの課題に決定した。１つは「半径１の円の面積が本当にπになるのか。」を考察する学習で，90分授業８回分で計画した。２つめは「等周の三角形のうちで面積が最も大きい三角形はどのような図形か，それはなぜか。」（以下，等周問題）を考察する学習で，90分授業２回分で計画した。

3.1　半径１の円の面積がπになることの数学的吟味

半径１の円の面積がπになるのかどうかを確かめる方法として，半径１の円に内接する正多角形を考え，その正多角形の面積を求める方法を提示した。半径１の円に内接する正多角形は，正三角形から始まり，正四角形（正方形）…と，その頂点の数を増やしていき，それらの正多角形の面積をそれぞれ求める。このとき，半径１の円に内接する正多角形の面積は，円の面積よりも大きくなることはなく，しかも半径１の円の面積に近づいていくと考えてよいことを確認した。本来は，図１のように，半径１の円に内接する正 n 角形の面積 s_n と，半径１の円に外接する正多角形の面積 S_n を求めることにより半径１の円の面積を評価しなければならない。実際，半径１の円の面積を X とすれば，任意の自然数 n（n≧3）に対して，不等式

$$s_n \leqq X \leqq S_n$$

がなりたち，しかも n を大きくしていくと，s_n と S_n が一定の値に近づくことが示される。このことを利用して，半径１の円の面積を求めていく[3]。しかしながらプレマスターコースの受講生の既有知識を考えると，半径１の円に内接する正多角形の面積を求めることが限界である。そこで，半径１の円に内接する正多角形の面積 s_n だけ考察していくことを受講生に伝えた。なお，この学習に先だって多角形と正多角形を定義した。この際，

「円に内接する多角形の辺の長さが等しければその多角形は正多角形である。」

ことも証明した。

①　半径１の円に内接する正三角形の面積

三角形の面積の求め方を知らない受講生は一人もいなかったものの，半径１の円に内接する正三角形の１辺の長さや高さは，既有知識を駆使しても求められない（図２）。そこで，半径１の円に内接する正三角形の面積を求める準備として，最初に平方根の定義を提示した。その際，中学校３年の教科書を参照しながら，

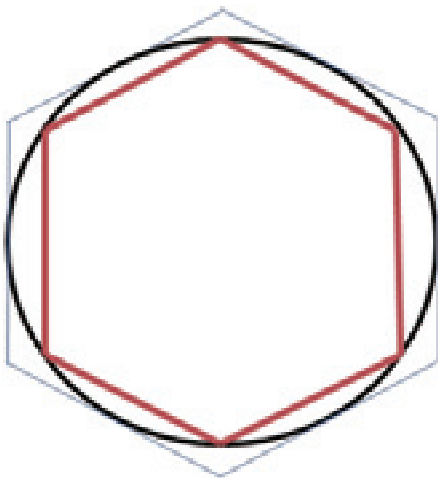


図１　半径１の円に内・外接する正六角形

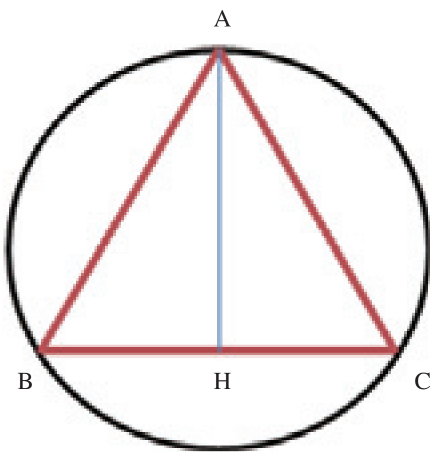
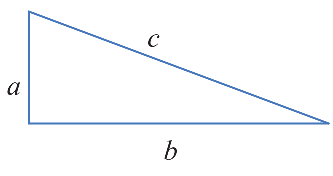


図２　半径１の円に内接する正三角形

「$x^2=a$（>0）のとき，x を a の平方根であるといい，$x=\pm\sqrt{a}$ とあらわす。」と定義した。ここでは，a の平方根には正の平方根と負の平方根があることを強調した。その後，三平方の定理を提示した（図３）。そして $a=1$，$c=2$の場合の証明を宿題とした。次時に１人の受講生が証明の途中まで考えてきたので，その考えを発表してもらった（図４）。



直角三角形で，直角を挟む２辺を a，b，斜辺を c とすると，
$a^2+b^2=c^2$

図３　三平方の定理

この受講生は，最初に直角三角形の３辺を $a=1$，$c=2$，$b=x$ とおいた。そして，この直角三角形と合同な直角三角形を４つ使って四角形を作った。次に，大きい四角形と小さい四角形が，いずれも正方形になることを証明した。さらに，大きな正方形の面積が４であること，４つの合同な直角三角形の面積の和が$2x$ であることから，２次方程式

$$4-2x=(x-1)^2$$

を導くところまで解決してきた。

受講生は２次方程式の解き方を知らないので，２次方程式の解法は筆者らが示し，

図４　三平方の定理の証明

$x^2=3$

まで変形した。ここからは，受講生が平方根の定義を再確認しながら，大きい正方形の一辺の長さが$\sqrt{3}$になることを導いた。また，$a=1$，$c=2$の直角三角形は，正三角形の１つの頂点から対辺にひいたときにできる直角三角形や，三角定規と相似であることを確認した。

これらの準備を経て，半径１の円に内接する正三角形の１辺の長さと高さを考えることにした（図５）。そして，１辺の長さは$\sqrt{3}$，高さは$\frac{3}{2}$であることを確認し，受講生は，半径１の円に内接する正三角形の面積が$\frac{3\sqrt{3}}{4}$となることを導いた。電卓を用いて，この近似値が1.3になることを確かめるとともに，受講生は，半径１の円の面積が，まだπにはほど遠い数値であることを確認した。

なお筆者らは，直角三角形の面積を求める別の方法を用いて，三平方の定理を一般的に証明する方法も紹介した。直角三角形の，内接円の半径を高さとする３つの三角形に分割して，面積を求める方法があるが，これを用いて三平方の定理を証明した（図６）。この証明には，高等学校の内容を含み，しかも文字式の計算を駆使するものであるが，受講生は証明の手順を十分に理解していた。またこの証明後に，

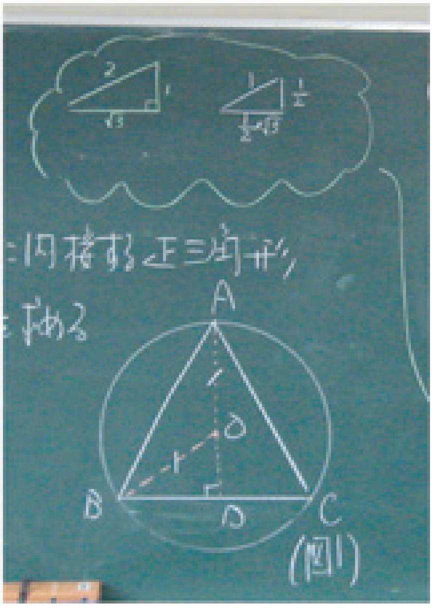


図５　半径１の円に内接する正三角形

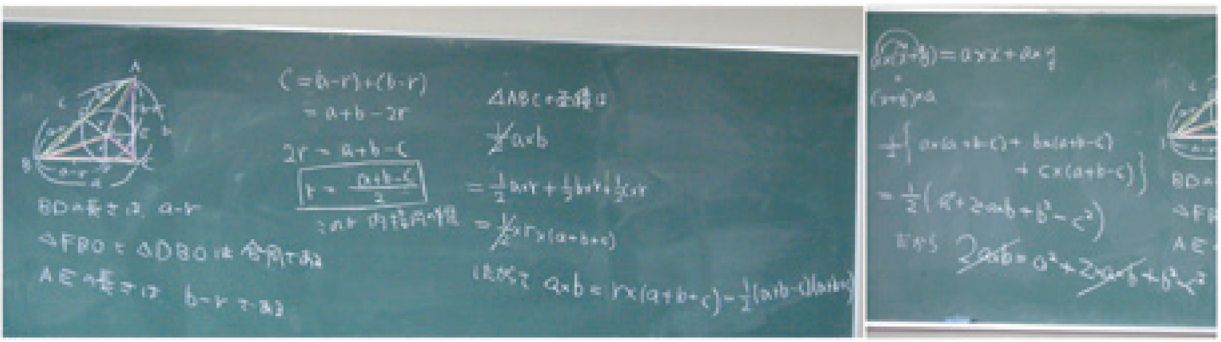


図６　三平方の定理の別証明

三平方の定理を満たす3つの自然数の組をピタゴラス数ということも教えた。そして，特に自然数nが偶数のとき，ピタゴラス数が，(n^2-1，$2n$，n^2+1)で得られることも教えた。受講生は，この事実を用いて，(3，4，5)，(15，8，17) などがピタゴラス数であることを確認していた。

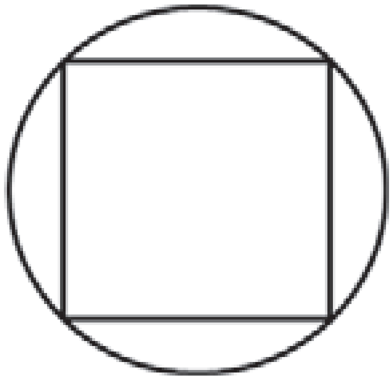


図7　半径1の円に内接する正方形

②　半径1の円に内接する正方形の面積

次に，半径1の円に内接する正方形の面積を求めた（図7）。この正方形の1辺の長さは，三平方の定理を用いて計算すると，$\sqrt{2}$になる。このことを利用して，受講生は半径1の円に内接する正方形の面積は2になることを確かめた。また，別解として，正方形をひし形ととらえ，ひし形の面積を求める公式を用いて

$$\frac{1}{2}\times 2\times 2$$

により，面積が2になることを確認した。受講生は，半径1の円に内接する正方形の面積も，まだπに程遠いことを確認した。

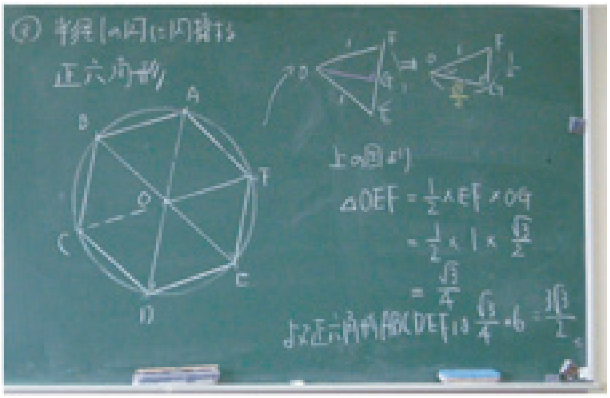


図8　半径1の円に内接する正六角形

③　半径1の円に内接する正六角形の面積

講義の目標が，半径1の円の面積が本当にπになるのかを明らかにすることであるから，面積が求めやすい正多角形を考えればよいことを確認し，次に半径1の円に内接する正六角形の面積を求めることを伝えた。半径1の円に内接する正六角形は，円の中心を通る3つの対角線をひけば，6つの合同な正三角形に分割される。そしてその正三角形の1辺の長さは1である。受講生はこの正三角形の面積を求めるのに三平方の定理を利用し，半径1の円に内接する正六角形の面積が$\frac{3\sqrt{3}}{2}$であることを，容易に導いた（図8）。

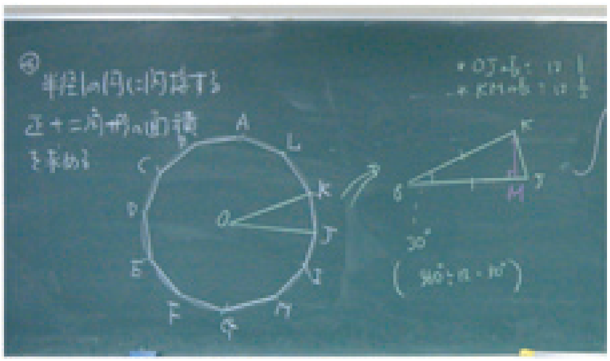


図9　半径1の円に内接する正十二角形

④　半径1の円に内接する正十二角形の面積

次に，半径1の円に内接する正十二角形の面積を求めることにした（図9）。この正十二角形は，半径1の円の中心を通る6つの対角線で分割すると，合同な12個の二等辺三角形に分割される。この二等辺三角形の面積を求めるのに，三平方の定理を利用できないか問いかけた。そして，二等辺三角形の頂角が30°であることに着目して，その面積が，

$$\frac{1}{2}\times\left(1\times\frac{1}{2}\right)$$

で求められることを導き，受講生は，半径1の円に内接する正十二角形の面積が3になることを確認した。この計算も，受講生は容易に導いた。この三角形の面積公式は高校で学習する汎用的な手法であるが，一般的には計算の過程で三角比を利用する。そこで，次に三角比の定義をした(図10)。さらに，数学Ⅰの巻末にある三角比表の読み方を指導した。

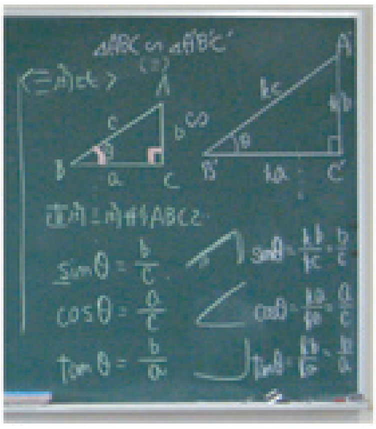


図10　三角比の定義

⑤　半径1の円に内接する正二十四角形の面積

以上の準備をして，半径1の円に内接する正二十四角形の面積を求める方法を考えた。この正二十四角形は，円の中心を通る12本の対角線をひくと合同な24個の二等辺三角形に分割される。この二等辺三角形は，等しい

２辺の長さが１で，頂角の大きさが15°である（図11）。このとき，頂点Ａから対辺に垂線AHをひいてできる直角三角形ABHで，頂角が∠ABH＝15°である。三角比表から，

$\sin 15° = 0.2588$

の値を読み取り，△ABCの面積は，

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times (AB \times \sin 15°) \times BC$$
$$= \frac{1}{2} \times (1 \times 0.2588) \times 1$$

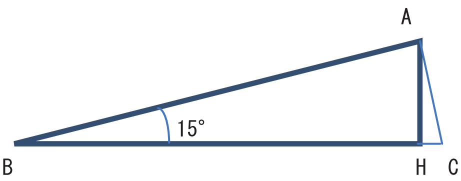


図11　頂角15°の二等辺三角形

となることを確認した。そして受講者は，半径１の円に内接する正二十四角形の面積は3.1となることを導いた。この学習を通して，受講生は，三角比を用いた同様の方法を用いれば，半径１の円に内接する多様な正多角形の面積が求められることに気づいた。

⑥　半径１の円に内接する他の正多角形の面積

その後，受講生たちは自発的に，半径１の円に内接する正三十六角形の面積や，正百八十角形の面積，正三百六十角形の面積を求めた。そして受講生は，それぞれの面積が3.12，3.14，3.15となることを確かめた。半径１の円に内接する正三百六十角形の面積が，πの値を超えたことについては，議論になった。そして，三角比表の値が四捨五入で与えられていることを説明した上で，sin1°の真の値について吟味することになった。三角比表から，sin1°＝0.175を読み取り，この値が小数第４位で四捨五入されているから，sin1°の真の値は

$0.1745 \leqq (\sin 1° \text{の真の値}) < 0.1755$

と評価できる。よって，不等式

$3.141 \leqq$（半径１の円に内接する正三百六十角形の面積の真の値）< 3.159

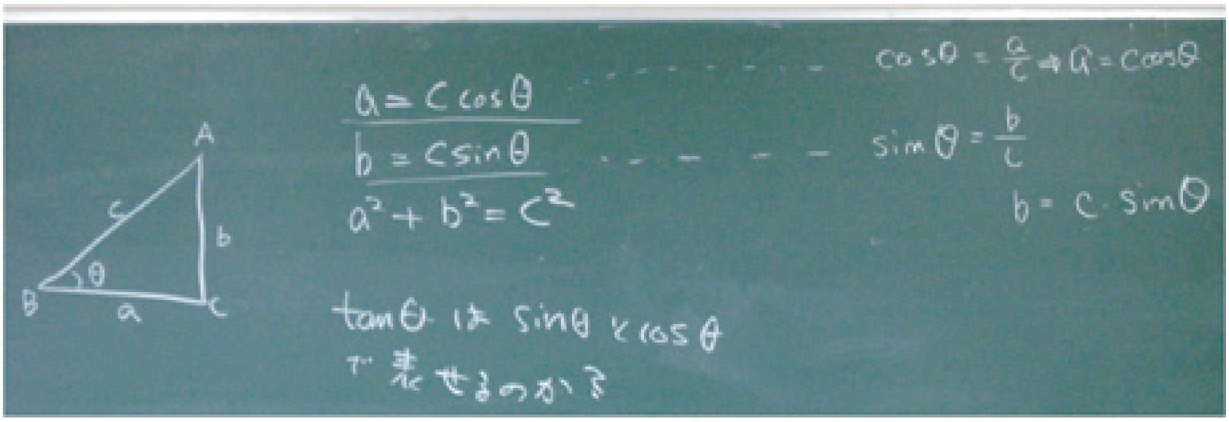


図12　三平方の定理と三角比の関係

が成り立つことを導いた。三角比表の値の誤差を360倍して面積を求めることによって，3.14を超える値になってしまったことを受講生は知り，三角比表の値は近似値であることも理解した。なお，三角比に関連して，三平方の定理と三角比の定義の関係に着眼する課題も受講生に与えた（図12）。

以上のような講義を通して，受講生は，半径１の円に内接する正多角形の面積を求めた。そして半径１の円に内接する正多角形の頂点の数を増やしていけば，その面積がπに近づくことを，様々な知識を体系化しながら導く体験をした。

⑦　区分求積法を用いた半径１の円の面積

受講生には，中心を原点とする半径１の円の方程式が，

$x^2 + y^2 = 1$

となることを知識として与えた。その上で，この円の第１象限の面積（以下，四分の一円の面積）Sが求められたら，それを４倍すれば半径１の円の面積に等しいことを確認した。次に，xの値を

$x = 0,\ 0.1,\ 0.2,\ \cdots,\ 0.9,\ 1$

とし，これらのxの値を方程式$x^2 + y^2 = 1$に代入し，さらに平方根の定義を利用して，yの値を求めるように促し

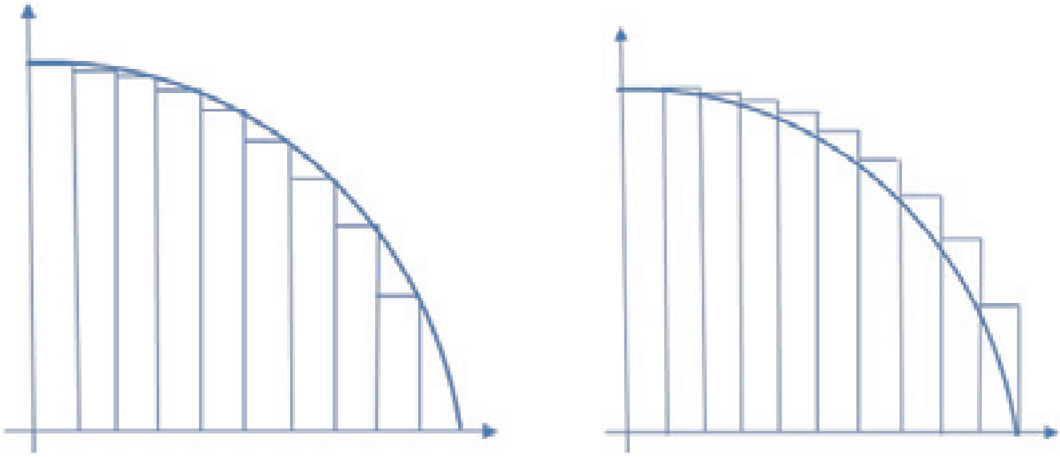


図13　半径１の四分の一円を長方形の面積の総和で近似（長方形による近似）

た。そして，四分の一円の面積Sを，横の長さが0.1の長方形の面積の総和で近似することにした（図13）。この際，四分の一円の面積Sは，図13の左側の長方形の面積の総和より大きく，右側の長方形の面積の総和より小さい[3]。このことを不等式で表すと，半径１の円の面積は，

　　2.904＜(半径１の円の面積の真の値；4S)＜3.304

となる。この手法で区分の仕方をさらに細かくすることによって，半径１の円の面積の近似値はさらに精度が上がることを伝え，この計算は宿題として与えた。なお，長方形による近似ではなく，台形で近似することで，下側の近似値の精度が上がることを図から確認した（図14）。そして計算の結果，

　　3.104＜(半径１の円の面積の真の値)＜3.304

となった。この方法によれば，この程度の区分のしかたでも，半径１の円の面積の，真の値に近い近似値が得られ，しかも，半径１の円に内接する正多角形の面積を求める方法よりも簡便であることを，受講生は理解した。

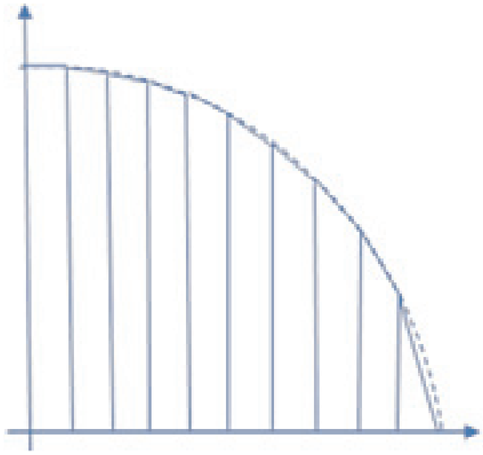


図14　台形による近似

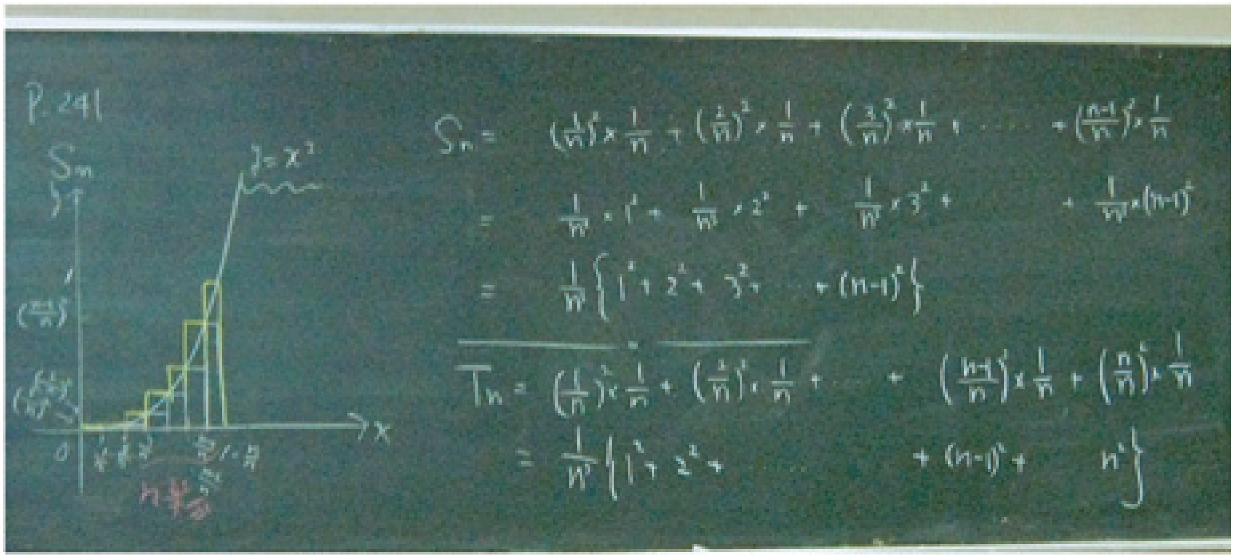


図15　放物線，x軸，直線x＝Ⅰで囲まれた図形の面積を求める計算

なお，この手法を区分求積法ということを，受講生に教えた。また，区分求積法で，区間をより細かくすれば，

さらに真の値に近い近似値が求められること，そしてこの考え方が，定積分の考え方につながっていくことを教えた。また，この考え方で，関数$y=x^2$のグラフ，x軸，直線$x=1$で囲まれてできる図形を，閉区間［0，1］をn等分して作った長方形の面積ではさみこんで，その面積を求める計算も示した（図15)。これは数学Ⅲの学習内容であるが，受講生はこの難度の計算でも，十分理解していた。

3.2　等周問題の考察

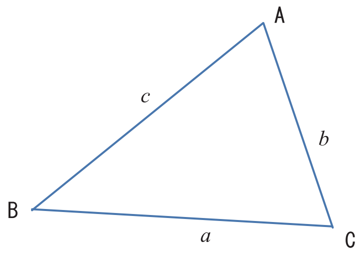
等周の三角形のうちで面積が最も大きい三角形はどのような三角形か，なぜそのことが言えるのかを考察する講義を，90分授業２回で行った。受講生には「周りの長さが与えられた三角形のうち，面積を最大にする三角形を求めよ。」という問題を提示し，この問題を数学的にとらえるために，図を与えながら，

「与えられた定数ℓ（>0）に対して，

$a+b+c=\ell$

を満たす三角形のうち，最大の面積を持つ三角形はどんな三角形か。」

と問題の題意を数学的に表現し直した（図16)。どんな三角形になるか予想するように促すと，受講生は正三角形ではないかと予想した。この予想は正しいことを伝え，等周の三角形で面積を最大にする三角形は正三角形になることを証明すればよいことを確認した。また，この先の等周問題として，「まわりの長さが与えられた四角形，五角形…と多角形の頂点の数を増やしていくとき，面積が最大になる多角形はどんな多角形か。」，「与えられた長さのひもの両端を結んだループで囲まれた平面図形を考えるとき，その面積が最大になる図形はどんな図形か。」さらに，「表面積が一定の空間図形で体積が最大になる図形はどんな図形か。」といった問題に発展していくことも伝えた。



$a+b+c=\ell$

図16　等周の三角形

①　変数の固定

しかしこの問題では，三角形の３辺a，b，cがすべて変数である。３変数では考えにくいので，３変数のうちの１辺aを固定して，２変数b，cについて，

$b+c=$（一定）

となる場合を考えることを伝えた。変数を１つ固定して，変数を減らして考察する手法は，数学でよく用いられるものの，中学校では学習しない。それでも受講生はこの考え方を認めて，

「AB＋BC＋CA＝（一定）の中で，△ABC の面積が最大である

⇒　$b=c$」

を証明すればよいことを理解した。

ところで，２点B，C を固定し，

PB＋PC＝（一定）

をみたす点P の集合は２点B，C を焦点とした楕円をかく（図17)。受講生は楕円を実際にかいてみることで，楕円をかくときに固定した２点から等距離にある点，すなわち点P が，

PB＝PC

を満たすときに，BC を底辺とする三角形PBC の高さが最も高いことを実感した。　そこで，さらに補足するために，楕円の方程式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

を与え，これを変形して，

$$y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

とし，この式から，x^2が最小のときy^2は最大になる，すなわち，

$x=0$のとき，y^2は最大になることを受講生に示した。そしてこの事実は，PB＝PC のときに三角形PBC の面積が最大，すなわち，AB＝AC を意味することを，受講生は理解していた(図18)。

このように，この問いは，方程式に頼ると簡潔に解決できるこ

図17　楕円の作図

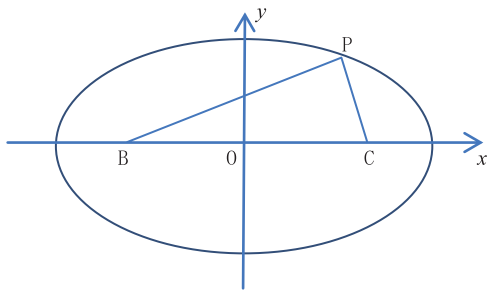


図18　楕円の方程式

とを，受講生は知った。また受講生は，図形の方程式が数学の有用な道具であることを認識した。

② 別の考え方による解決

別解として，２つの主張の関連から，「等周の三角形のうちで面積が最も大きい三角形が正三角形である。」ことを証明した。そのために，まず主張２を提示し，主張２から主張１が従うことを次のように説明した(図19)。

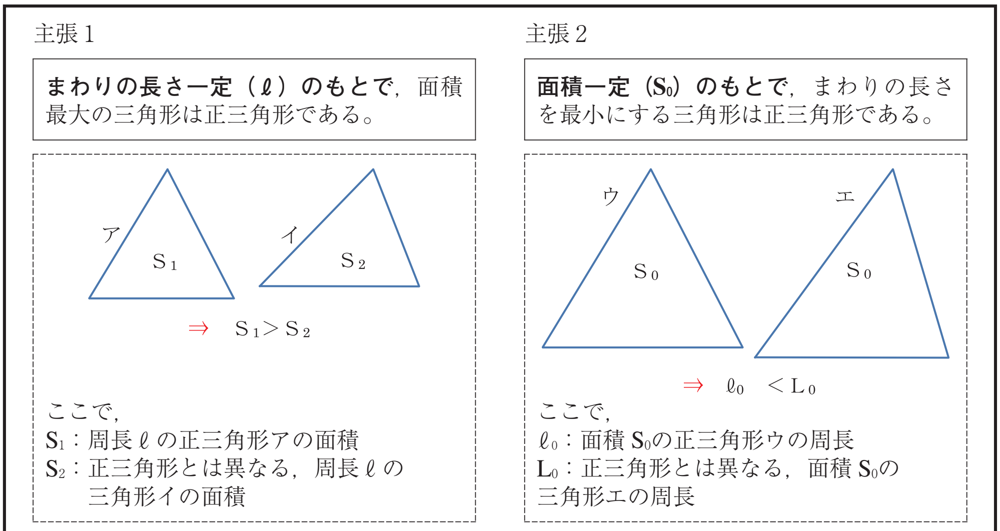


図19 主張１と主張２

この２つの主張において，２つの正三角形ア，ウは相似で，正三角形アの正三角形ウに対する相似比は $\dfrac{\ell}{\ell_0}$ である。また，三角形エを三角形イと相似になるようにとれば，三角形イの三角形エに対する相似比は $\dfrac{\ell}{L_0}$ である。仮定から $\ell_0<L_0$ であるから，$\dfrac{\ell}{L_0}<\dfrac{\ell}{\ell_0}$ となる。従って，正三角形ウを $\dfrac{\ell}{\ell_0}$ 倍に拡大した三角形，即ち周りの長さが ℓ になる正三角形は，正三角形ウを $\dfrac{\ell}{L_0}$ 倍拡大した三角形より大きい。一方，互いに同じ面積を持つ三角形は同じ比率で拡大したときもまた互いに同じ面積を持つことに注意すれば，正三角形ウを $\dfrac{\ell}{L_0}$ 倍拡大した三角形の面積は S_2 に等しい。以上の２つのことより，$S_1>S_2$ である。つまり，主張２が証明できれば，主張１が正しいことが認められる。

主張２の証明は，△ABC が条件を満たす三角形としたとき，AB＝AC であることを示すことから始めた（図20）。頂点 B，C を固定したとき，面積 S_0 をもつ三角形 PBC の点 P は，常に底辺 BC に平行な直線 m(距離＝$2S_0/|BC|$）上にあり，しかも，その時に限る。したがって，この直線 m 上の点 P のうち，PB＋PC が最小になるときが，条件を満たす三角形 ABC の頂点 A の位置である。最小値をとるときの点 P の位置は，点 C の直線 m に対する対称点 C’をとり，線分 BC’と直線 m の交点により得られる。これは作図の問題として中学校の教科書でも扱っている。AB＝AC でなければならないことが結論づけられることは，受講生もよく理解できていた(図20)。

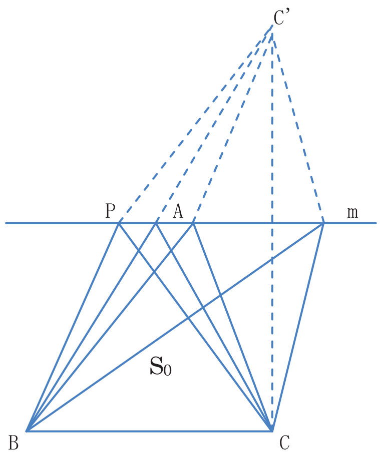


図20 主張２の証明

同様にして，AC を底辺として考えれば，BA＝BC である。以上から，

AB＝BC＝CA

を導いた。したがって，主張１「面積一定でまわりの長さを最小にする三角形は正三角形である。」ことが証明された。

この証明方法の一部には，背理法という間接証明法を含んでいる。これも中学校の学習範囲ではないが，受講生がこの推論を理解したことは驚きである。

4　受講生の反応

受講生は中学生１年生から３年生で，既有知識にも大きな差があるにもかかわらず，１度も欠席することなく，着実に学習を積み上げていった。いずれの受講生も数学に対する興味・関心は高く，自由課題で提案した課題も，模型を作成して持参してきたり，自力で解決を試みて発表してみたり，さらなる質問をしたりする場面も見られた。講義中は，受講生の既有知識に差があるために，多くの補足説明が必要であったし，そのたびに確認しながら学習した。それでも，決して易しくない内容に対して，受講生がじっくり取り組み，考える姿に，筆者らは驚きを隠せなかった。

表１　プレマスターコース終了後のアンケートの概要（1）

質問項目		評価		
		中１	中２	中３
1	プレマスターコースの講座は楽しかったですか。	4	5	5
	楽しかった内容を具体的にかいてください。	**自由記述（表２）**		
2	プレマスターコースの講座は講義が多かったですが，理解できましたか。	4	4	5
3	講義では用語を定義し，定理を証明しながら半径１の円に内接する正多角形の面積を求めていくような「数学の体系」を経験してもらいましたが，数学の体系を体験できたと思いますか。	5	4	4
4	プレマスターコースの講座に意欲的に取り組めましたか。	5	4	5
5	新しい知識が身についたと思いますか。	5	5	5
6	予想される結果を自分なりに考えられましたか。	4	5	4
7	淡路島での講義はおもしろかったですか。	5	4	4
8	淡路島での自分たちのプレゼンは，学んだことを発表できましたか。	5	5	5
9	**プレマスターコースを終えた現在の感想を教えてください。**	**自由記述（表２）**		

プレマスターコース終了時に，９項目のアンケートを実施した（表１）。この表中の数値は，受講生による５段階の自己評価である。筆者らは，講義の最中から，受講生がプレマスターコースの学習に興味を持ち，新しい学習に喜びや感動を感じていると思っていたが，この事実をうかがわせるデータが，アンケート結果から得られた。淡路島の合宿で，プレマスターコースの学習内容をプレゼンテーションしたことによって，受講生が新しい学習に喜びや感動を強く感じたと考えている。合宿でのプレゼンテーションの準備のために，受講生と筆者らは，講義とは別に集まって発表練習した。合宿でのプレゼンテーションは10分程度のものだったが，受講生にとっては，この発表練習が，これまでの学習内容の復習となり，学習内容の理解をさらに深める機会となっていたようである。淡路島でのプレゼンテーションでは，半径１の円の面積が本当にπになるのかどうかを確かめる手順や方法も，明確に視聴者へ伝えていた。その発表内容を聞いていても，受講生の理解度の深さを感じることができた。表２には，アンケートの自由記述の部分をまとめた。受講生は，プレマスターコースの講義を通して楽しかった内容を具体的に的確に示しているし，プレマスターコースを終えて今後の自分の取り組み方や要望を明確に示している。このアンケート結果は，数学に対する高い関心・意欲を持った中学生に，さらなる関心・意欲を高められるような講義が，プレマスターコースで実践できたことを裏付ける資料だと考えている。また，上級学年の受講生ほど，理解した内容や今後の考えを具体的に述べている点は興味深い。なお，学校現場での経験を有する筆者は，数学に対して非常に強い興味・関心を持っている生徒に，プレマスターコースの内容と同等の指導を実践したことがある。しかしながら，アンケートにあるような感動や興味・関心の深化を，学習者から引き出せなかった。その要因として，事前に行った教材の検討に，大きな質の違いがあると考えている。プレマスターコースで提示した教材の検討では，学問としての数学の位置づけまで常に意識して，何を受講生に伝えるのかに腐心していた。授業者は教材の学問的背景を十分に理解し，これを意識して指導しなければいけないことを，プレマスターコースの指導を通して，改めて教えられた。

表２　プレマスターコース終了後のアンケートの概要（2）

		中学１年生	中学２年生	中学３年生
1	**楽しかった内容を具体的にかいてください。**	・正多角形の面積を求めたこと ・定理を証明したこと	・ピタゴラスの定理の証明など，広く使える公式について考えたこと	・中学校では習わない定理や証明などの新しい知識・考えが発見できたことです。あと，楕円を書く作業が楽しかったです。
9	**プレマスターコースを終えた現在の感想を教えてください。**	・数学はおもしろいと思いました。いろいろ知った公式やピタゴラス数などについても，もっと本で深めていきたいと思います。	・これまで自分で取り組んでいた，算数・数学の内容よりも遙かに難しいテーマについて考えましたが，それらの中には自分の知識の範囲で解けるものも多くあったので，一つの公式や定理をなるべく多様な使い方ができるようにすることが大切だと思いました。	・私自身，プレマスターコースはあっという間に終わってしまったように思います。わからなくて，行き詰まったという感じがなくて，すっと理解することができました。今後は作業をして実際にそうなるか検証したり，考えを深めるために討論したりする機会も増えたらいいなと思います！

5　今後の課題

まもなくマスターコースの研究も始まる。数学領域のプレマスターコースを終了した３名が，そのままマスターコースに進んできている。マスターコースでは，受講生が調べてみたいことがらや，興味があることがらを探ってもらうことから始めたいと考えている。筆者らが準備した教材を取り扱うことよりも，受講生が自ら問いを立てて，それを解決しようとする過程も経験して欲しいと願っているからである。その際に必要な知識や概念は，筆者らが提供しながら議論していく場面をつくりたい。そして受講生には，問いを解決するだけでなく，その問いに関連した数学にも触れ，時には本論からかけ離れた道草もしながら，その過程を楽しんでもらいたい。限られた時間ではあるが，楽しみと感動を持てる研究になるような試みを目指していくことが今後の課題である。

なお，本研究の推進にあたっては，大変お忙しい中，鳴門教育大学名誉教授の今倉康宏先生に，貴重なご指導とご助言，ご示唆をいただくことができた。本研究が報告できるのは今倉康宏先生のご厚情のたまものである。また，プレマスターコースでは，自然系コース（数学）院生の石原嵩君に，多くの準備と配慮をいただいた。彼の手助けがなければ，充実したプレマスターコースの講義は実施できなかった。この場を借りて両氏に感謝申し上げる。

参考文献

中学校数学１（中学校数学科用），数研出版，2011，pp. 202－203
中学校数学３（中学校数学科用），数研出版，2011，pp. 16－18，pp. 40－42，pp. 168－170
数学Ⅰ（高等学校数学科用），数研出版，2011，pp. 120－123
数学Ⅱ（高等学校数学科用），数研出版，2011，p. 227
数学Ⅲ（高等学校数学科用），数研出版，2011，pp. 36－38，p. 241
金児正史，円に内接する多角形の面積，数学教育 No. 594，明治図書，2007，pp. 32－35

注

１）スタンダードコース，プレマスターコース，マスターコースのステップアップコースを設定した。
２）http : //www.jst.go.jp/cpse/fsp/about/report.html（2014）
３）高校数学では「はさみうちの原理」という。数学Ⅲの学習内容である。

Deployment of the pre master's course in a mathematics domain

—— The contents of the lectures of the pre master's course in a mathematics domain ——

KANEKO Masafumi*, NARUKAWA Kimiaki* and HIRANO Yasuyuki*

The contents of the lectures and the learner's reaction in the pre master's course in a mathematical domain are reported here. Two contents in the lectures are designed, the area of a circle and an isoperimetric problem. All learners were middle school students and have got high motivation for mathematics. Although the learners know the formula of the area of a circle well, they have little experiences which make them realize that the formula does really hold. In the first lecture, an argument – to compare the areas of inscribed regular polygons with the one of a unit circle, whose idea comes to the usual measure theory in the future, was explained. Through the process of calculating the areas of various kind of inscribed regular polygons to a unit circle, the learners appreciated that the area of a unit circle is really equal to π and convinced themselves of the fact. In the latter lecture, they have considered an isoperimetric problem and showed that the equilateral triangle has the largest area among the triangles with constant perimeter. Although a few mathematical concepts and treatments have been required to follow the procedure of the arguments, they overcame these difficulties eagerly and recognized two contents of mathematics in the pre master's course. Through the program in the pre master's course in a mathematical domain, we noticed that learners with high motivation for mathematics study many advanced contents extensively and extend their interests for themselves only with the help of introducing well–suited orientations and with the proper support to give some necessary concepts.

*Advanced Educational Practitioner. Naruto University of Education
**Natural Science Education (Mathematics). Naruto University of Education