鳴門教育大学研究紀要
第 33 巻　2018

「科学・技術者の発掘・養成講座」における数学領域の学習内容の教材化

～立体模型の展開図の考察や計算尺の原理の理解を素材として～

金　児　正　史*，成　川　公　昭**，宮　口　智　成**

（キーワード：「科学・技術者の発掘・養成講座」，立体の展開図の作図，計算尺の原理）

1．はじめに

平成25年度 JST の委託事業「次世代科学者育成プログラム（メニュー B）」として採択された「「科学・技術者の発掘・養成講座」～徳島から育てよう未来の科学・技術者を～」から端を発した科学・技術領域の講座は，対象を小学生（５，６年生）と中学生として実施された。この講座はその後，本学の継続的な講座として，同名のまま，毎年開催されてきており，平成28年度までに，３期にわたって約100人の修了生を送り出した。平成25年度の第１期の講座の開設期間は２年，平成27年度と28年度の第２期と第３期の講座の開設期間は１年である。第２期と第３期の講座では，前半の半年間では，数学，物理，生物，化学，地学，技術工学，情報，脳科学の基本講座を，受講者全員を対象として実施した。また後半の半年間では，受講生が希望するいずれかの講座を，それぞれ毎月１回の割合で実施した。「科学・技術者の発掘・養成講座」は，本学の教員のみならず，徳島県教育委員会や徳島県下の市町村教育委員会，各小中学校，地域の関係機関らのご協力を得ながら，密接に連携して運営されてきた。第１期の数学領域講座の学習内容は，すでに本学の大学研究紀要で報告しているが，本論文では平成28年度の第３期における，後半の数学領域講座に参加した小学校５年生，６年生，中学校１年生の３人を対象とした学習内容を紹介するとともに，それらの学習内容をもとに，上級学年での教材化を行い，その学習指導計画の概要について示す。本研究で教材化を目指した学習内容は，展開図を自ら考えてつくる立体模型の作製と，計算尺の原理とその作製である。

2．「科学・技術者の発掘・養成講座」における第３期の数学領域講座の概要

第２章では，平成28年度に実施した第３期の後半の半年間の，数学領域講座の学習内容の概要を示す。数学領域講座は，平成28年10月から計６回実施し，90分授業12回分の講義を行った。講義では，以下の４つの学習内容を行った。提示された立体模型の展開図を作図し立体を完成する学習，ノギスの目盛りの原理の学習，曲尺の目盛りの原理の学習，計算尺の原理とその利用方法の学習である。数学領域の講座を希望した児童生徒は小学校５年から中学校１年までの３人であり，最も学齢が若い児童の既習の知識内容を前提として指導することになるが，実際には，数学講座を希望する児童生徒は，その学齢で学習する内容の理解にとどまらず，発展的な数学に主体的に取り組んでいて，数学の知識も多い傾向にある。平成28年度も同様の状況であり，数学領域の講座を開始する時点では，正負の数の理解もできている状況だった。そこで，正負の数の理解を前提としつつ，新たな数学的な知識の活用が必要となる場合は，その都度具体例を示しつつ，できるかぎり証明も行ったうえで，必要な定理を示し，それを利用していくようにした。また，定理を確認する際には，参考図書として受講生に配布していた中学校１年生から高校数学までの教科書を利用した。

例えば，立体模型の展開図を作製する学習では，本来は，コンパスと定規で作図することが求められるが，作業では方眼工作紙を活用したので，直角の作図にはこだわらずに，方眼を利用することも認めるようにした。一方，展開図をつくる別の方法では，三平方の定理や三角比を活用することも可能なため，受講者の理解の様子を注意深く観察しながらではあるが，状況が許せば，極力，発展的な学習内容についても触れるように心がけた。計算尺の原理には，積を和でとらえる工夫が活用されているが，その理解のためには，高等学校数学で学習する，

*鳴門教育大学教職実践力高度化コース
**鳴門教育大学自然系コース（数学）

指数関数や対数関数の理解を必要とする。このため，受講者の既有知識は全く活用できない状況であるが，数学領域講座では，既習事項を大きく越えていても，受講生の状況を見ながら，数学的な考察を体験することを大切にした。もちろん，受講生にとっては難解な内容に関する理解を必要とするが，受講生の新たな数学に挑戦したい意欲を頼りにしながら，できるかぎりわかりやすい解説をして，少しでも理解してもらおうと考えた。立体模型の展開図づくりと計算尺の原理についての講義の概要は，それぞれ第３章と第４章で示す。また，本講座で実践した講義をもとに，高等学校や大学での授業を想定した学習指導案も示し，授業実践の見通しも示す。

３．立体模型の展開図づくりの講義概要

この講義では，図１のように，額のような形をしている立体の展開図をつくり，その展開図を利用して，同じ立体をつくってみよう，という課題を受講者に提示した。なお作図については，受講生の学齢を考えて，極力，定規とコンパスを利用することとしたが，方眼を使ったり三角定規を当てて角度を見いだすことも，作業の中では許容することにした。額のような形をしている立体は，正四角柱を利用してできる立体，正三角柱を利用してできる立体，円柱を利用してできる立体である（図１）。展開図をつくる課題の順は，正四角柱を利用してできる立体，正三角柱を利用してできる立体，円柱を利用してできる立体の順とした。この講座で扱った正四角柱を利用してできる立体では，頂点部分で接合する正四角柱がなす角は，60度である。したがって，正四角柱は30度となるように，切り出せればよい（図２）。この事実の理解は，受講生にとっては難しいことではなかった。受講者には図３に示すような長方形が印刷された，画用紙でできた方眼紙を利用して，30度の作図を考えるように促した。30度については，三角定規を利用することも視野に入れていたが，正三角形の１頂点から対辺に垂線をひいてできる２つの合同な直角三角形のつくる角度であることを伝え，正三角形の作図を利用して30度を見いだすように促した。

次に，正三角柱を利用してできる立体についても展開図をつくることを伝えた。しかし正三角柱を利用してつくる立体では，正四角柱のときの30度と同様の作図をした展開図では，最初に提示された立体はつくれない。そこで，これらの立体模型をよく観察するように促した。すると，受講生は正面図（図４）で見れば，正三角柱がつくる角は，60度であることに気付いた。そして，このことを利用して，正三角柱の切り口の様子について考察し始めた。図４の正面図では，２つの三角柱のなす角は60度であるから，１つの三角柱では30度になる。この１つの三角柱を，切り口が見える側面図で考えるために，切り口の様子の見取り図（図５の上の図）をかいて示し，その形状について考えることを伝えた。正三角柱の底面（図５の左下の図）の１辺の長さを４とすれば，三平方の定理から，正三角形の高さは $2\sqrt{3}$ となる。また，切り口の正面図は，見取り図（図５の上の図）中に図示したように，$1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形になる。この直角三角形について（図５の右下の図），直角を挟む最も短い辺の長さが $2\sqrt{3}$ だから，三平方の定理を適用すれば直角を挟む残りの辺の長さは $2\sqrt{3}\times\sqrt{3}$ となり，計算の結果，６となることがわかる。このことから，正三角柱の切り口の直角三角形は，直角を挟む２辺が４，６となる。以上の説明は，三平方の定理を利用できる場合の解説であるが，この説明を理解できた受講生は２名だった。一方，作図を利用した説明もおこなった。既に図５で述べたように，正三角柱の切り口の側面図は正三角形となる。そこで，この正三角形の頂点から対辺に垂線をひく作図をすれば，正三角柱の高さが作図できる（図６）。図４の


図１　作製する立体模型


図２　正四角柱がなす角

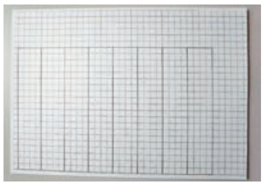


図３　配布した方眼紙


図４　正三角柱でできた図形（正面図）

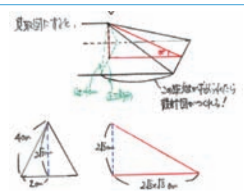


図５　正三角柱の切り口

図６　作図を用いた展開図のかき方

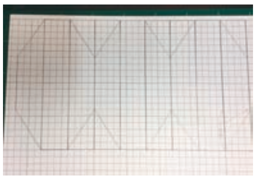


図７　図４の立体の展開図の例


図８　円柱でできる立体の展開図


図９　円柱でできる立体


図10　洋服の型紙

立体の正面図から，正三角柱の切り口の正面図は30度になる（図５の上図）。そこで，三角形の外角の性質を利用すれば，底角が30度で等辺が４の二等辺三角形に着目して，２つの内角30度の和が，他の外角60度に等しいから，図６のような三角形を作図すればよいことがわかる。そして，求める長さが６になることもわかった。講義ではこのように２つの方法で説明したが，受講生は三平方の定理を利用した方法がわかりやすかったようである。受講生はこの知識をもとにして，作図をしたり，直角を挟む２辺の長さが４cm と６cm になるような直角三角形を方眼にかいて，展開図を完成した（図７）。

次に，円柱を用いて額のような立体をつくることを伝えた。この立体の作図は，三角関数を自由に使える段階でなければできないため，展開図を与えて立体をつくることだけを行った。そして図８の展開図を曲線部分で切りとったものを３つ利用して，切り口をつなぐと，図９のような立体ができることを確かめた。図８で示したような，円柱でできる立体の展開図の曲線は，三角関数のサインカーブであること，このカーブは，洋服の型紙にある曲線とほぼ一致することなどを受講生に伝え，この授業を終えた（図10）。

４．計算尺の原理の講義概要

計算尺は対数計算の性質を利用した，計算結果の概数を求める道具である。そのため，計算尺の原理を理解するためには，対数関数や指数関数の理解が欠かせない。受講生が小中学生であることを考えると，かなり挑戦的な内容であったが，今回の受講生は，計算尺の理解に積極的に努め，おおよその理解ができた。その講義内容を概説する。

まず最初に，指数関数の理解を図ることにした。指数は，光の速さや星までの距離，分子の個数などのように，大きな数を表したり，原子の半径のように小さな数を表したりするときに使う表現であることを伝えた。そして，

$10=10^1$

$100=10\times10=10^2$　（10の２乗）

$1000=10\times10\times10=10^3$　（10の３乗）

$100000=10^5$　（10の５乗）

と表現することを教え，10が m 個掛け合わされたとき，10^m と表すことも教えた。そして，このような表現を，指数表現ということ，右肩にある小さい数を指数ということを伝えた。

$$10^m=\underbrace{10\times10\times\cdots\cdots\cdots\times10}_{m\text{ 個}}$$

また，基本となる数（基数）はどんな数でもよいことを伝えた。例えば，

$2^3=2\times2\times2$　（$=8$）

$3^5=3\times3\times3\times3\times3$　（$=243$）

さらにまた，０以外のどんな数 a に対しても，

$a^0=1$　（例えば，$2^0=1$，$10^0=1$）

と決めることも教えた。以上の指導によって，指数が０以上の整数の場合について，指数の表現の定義を明らかにした。次に，指数が０以上の整数の範囲において，指数法則が成り立つことの指導を行った。例えば

$2^3\times2^5$の場合に，

受講者は

$$\begin{aligned}2^3\times2^5&=(2\times2\times2)\times(2\times2\times2\times2\times2)\\&=2^8\end{aligned}$$

と表すことができることに気づいた。中には，電卓で計算して256になることを確かめる受講生もいた。

更に計算を複雑にして，

$$2^2 \times 2^{10} = 2^{12}$$

になることを確認した上で，一般的に

$$\left.\begin{array}{l} 2^m \times 2^n = 2^{m+n} \\ 10^p \times 10^q = 10^{p+q} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots(1)$$

となることを，１つ目の指数法則が，０以上の整数の場合で成り立つことを確認した。

次に，$(2^m)^n$ の計算結果について考えさせた。最初は戸惑う受講生が多かったが，2^m を１かたまりの数と見て，2^m が n 個かけあわせれていると考えればよいことに気づくと，

$$(2^m)^n = \underbrace{2^m \times 2^m \times \cdots\cdots\cdots \times 2^m}_{n \text{個}}$$

となるのではないか，と考える受講生も出てきた。しかし難しい受講生もいたので，具体的な数を例に挙げて，

$$\begin{aligned} (2^3)^4 &= 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \\ &= (2\times2\times2) \times (2\times2\times2) \times (2\times2\times2) \times (2\times2\times2) \\ &= 2^{3\times4} \end{aligned}$$

を導き，

$$(2^m)^n = 2^m \times 2^m \times \cdots\cdots\cdots \times 2^m = 2^{mn} \cdots\cdots\cdots(2)$$

という，２つ目の指数法則を示した。

次に指数法則をもとにして対数の定義を導入した。２の累乗の一覧を板書した上で対数の定義をし，２の累乗を対数で表示するように促した。受講生は，対数の定義を理解して，この作業を行った（図11, 12, 13）。

さらに，２つの指数法則を，対数の定義を利用して表すとどのようになるか，考えるように伝えた。例示した指数法則は，

$$2^3 \times 2^5 = 2^{3+5} \quad (= 2^8)$$

である。$2^3 \times 2^5$の答えは，指数が$3+5=8$になっていることに注目させた。そして，

$$log_2(2^3 \times 2^5) = log_2 2^{3+5}$$

と変形できることを確認し，

$$log_2(2^3 \times 2^5) = 3+5$$

すなわち，

$$log_2 2^8 = log_2 2^3 + log_2 2^5 \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

が導けることを確認した。この一例しか取り扱わなかったが，この具体例から，

$$log_2 a \times b = log_2 a + log_2 b \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

となることを伝えた。この計算処理には多少閉口している受講生もいたが，丁寧に導いて，受講生が理解できるようにした。

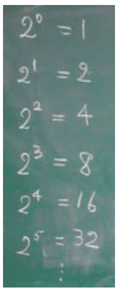


図11
２の累乗

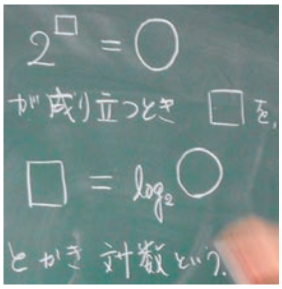


図12
対数の定義

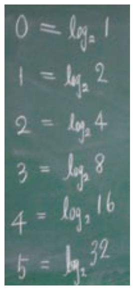


図13
対数の表示

また，式(3)に注目し，対数の表示に倣えば，

$$8 = 3+5$$

となって，２の指数の加法だけが見いだされることを強調した。なお，対数関数では，a や b に自然数が入る場合について説明したが，実際には任意の正数 a，b に対して式(4)が成り立つことを，口頭で説明して，先に進んだ。

次に，対数の目盛りを打った計算尺をつくると，かけ算やわり算の結果が求められることについて説明し，目盛りの打ち方について説明した。計算尺では，底を２とするとき，図14の写真中の丸番号で示した数を，目盛りとして打つ。例えば目盛り１から目盛り８までの長さは $log_2 8$なので，目盛り１から長さ３の所に目盛り８を打っている。計算尺では，このように尺の左端から $log_2 M$ の距離にある地点に，目盛り M を

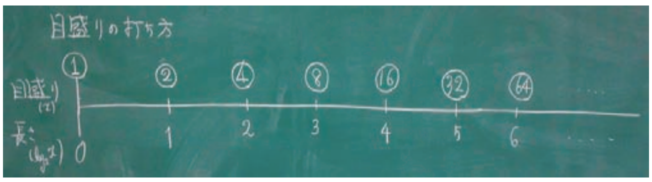


図14　計算尺の目盛りの打ち方の説明

打っていく。対数と指数の関係から，尺の長さは指数でもある。こうした尺を２つつくれば，かけ算ができる。

図15は，かけ算の原理を，4×8を例にして説明した板書である。4×8の計算では，まず上の尺の目盛り４の所に，下の尺の目盛り１がそろうようにする。下の尺の目盛り８にそろう上の尺の目盛り32が，4×8の答である。目盛り32は，尺の長さで見ると2+3となっていて５である。つまり，目盛りは2^5(＝32)である。このように，計算尺は，その長さが指数になっていて，4×8のかけ算は，$2^2\times2^3$の，被乗数と乗数のそれぞれの指数２と３の和５が，計算尺の上で再現されていることを，受講生に伝えた。乗法が加法に変換できる妙味に気づいた受講生は，計算尺の工夫に驚いていた。

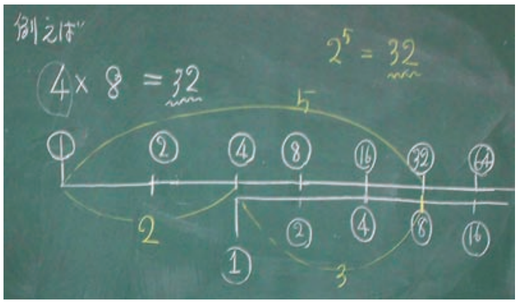


図15　計算尺によるかけ算の原理

この後，目盛りの打ち方を一般化して説明した(図16)。その上で，この段階で，２の累乗が０以上の整数だけでなく，負の整数や分数の目盛りの打ち方についても言及した。これまでの復習から，Mの目盛りは，尺の左端からlog_2Mの長さの所に打てばよい。だから，例えば目盛り３は，尺の左端からlog_23の長さの所に打てばよい。log_23は，$2^x=3$のxのことだから，そのために，2^xの表を考えていけばよいことを伝えた。

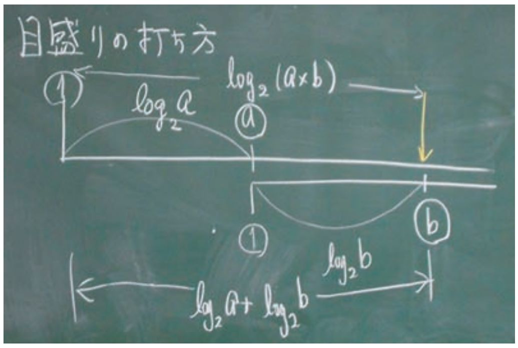


図16　計算尺によるかけ算の原理の一般化

ここまでは，目盛りMを決めて，長さがlog_2Mの所の目盛りを打つことで話を進めてきたが，ここからは２の累乗を強調するために，長さxを決めて，その長さの所には2^xの目盛りを打つことで話を進めていく。具体的な値について最初に取り上げた事例は$2^{\frac{1}{2}}$である。指数法則から，$2^{\frac{1}{2}}$の２乗は２であるから，$2^{\frac{1}{2}}$をyとおけば，$y^2=2(y>0)$となる。

２乗して２になるような数を，電卓を用いて探していくと，$y=1.414$……となる。したがって，尺の左端から$\frac{1}{2}$の長さの所に，1.414……と目盛りを打てばよいことを伝えた。同様に処理することで，$2^{\frac{1}{3}}$の３乗は２であるから，これをyとおけば，$y^3=2(y>0)$となる数を，電卓を利用して求めることで，$y=1.2599$……だから，尺の左端から$\frac{1}{3}$の長さの所に，1.2599……と目盛りを打てばよいことを，受講生も理解した。さらに，$2^{\frac{1}{n}}$をyとおけば，$y^n=2(y>0)$となるので，同様に，計算をしていけば目盛りが打てることを確認した。

また，指数が単位分数ではない場合についても検討を加えた。指数法則から，$2^{\frac{m}{n}}$は，

$$2^{\frac{m}{n}}=\underbrace{2^{\frac{1}{n}}\times2^{\frac{1}{n}}\times\cdots\cdots\times2^{\frac{1}{n}}}_{m\text{個}}$$

で決めることを伝え，例えば

$$2^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{1}{3}}=1.2599\cdots\cdots\times1.2599\cdots\cdots$$

で求められることを確認し，正の有理数の範囲で目盛りが打てることを確認した。また，まだ紹介していなかった対数の性質

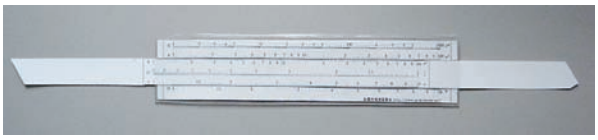


図17　インターネット上のデータを
もとにして作製した計算尺

$$log_2\frac{a}{b}=log_2a-log_2b \qquad \cdots\cdots\cdots(5)$$

も導いた。その上で，解説を簡単にするために基数を２として説明を行ったが，これらの性質は基数を10としても成り立ち，実際の計算尺は10を基数として使っていることを説明して，数学的な解説は終了した。

この後は，インターネット上にある計算尺の目盛りを打ってあるデータを印刷し，これを元に計算尺をつくり，

その計算尺を利用して，四則計算の仕方を確かめ，計算尺の有用性について，理解を深めた（図17）。

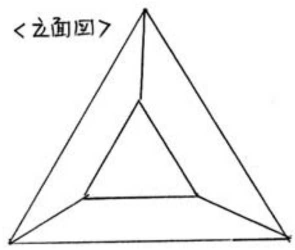
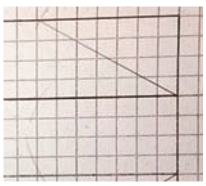
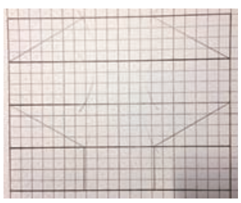
5．立体模型の展開図づくりの講義をもとにした学習指導案

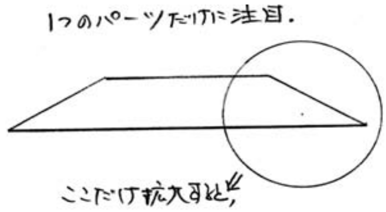
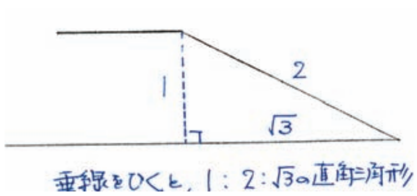
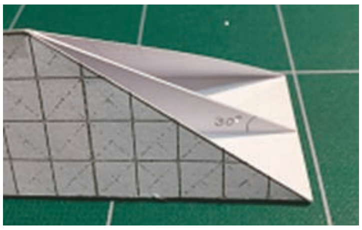
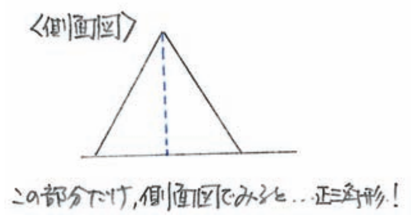
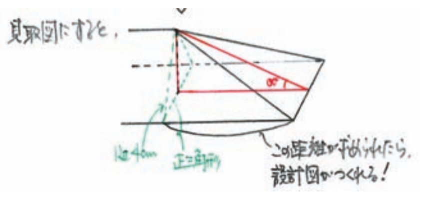
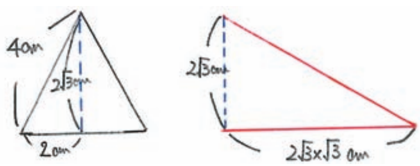
第３章で示したように，三平方の定理や三角関数が既習知識であれば，学習内容が深めやすい。そこで，授業対象を，中学校３年生から高校３年生までを想定して，２時間計画の学習指導案を示す。この指導の目標は，

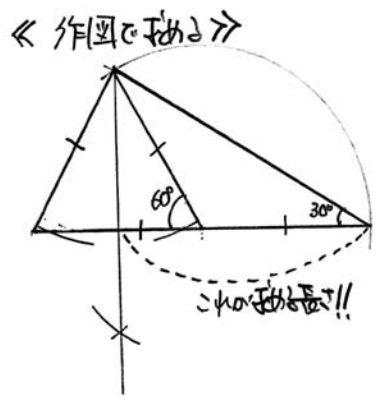
1　これまでの数学の既習知識を活用して，指定された立体模型がつくれることを理解する
2　日常生活の中に数学が息づいていることを知り，数学を身近に感じたり，数学的な見方のよさを実感できるようにする

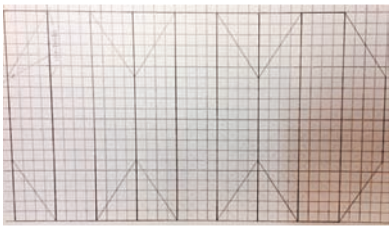
とする。また，準備物は，黒板用コンパス，黒板用定規，実物投影機，プロジェクタ，スクリーン，画用紙３種類，はさみ，コンパス，長ネギ，包丁，洋服の型紙である。なお，柱体を利用してできる立体は１穴の閉曲面であることから，以下の学習指導案では，トーラスの用語を用いて，学習指導案を作成した。

＜学習指導案＞

学習指導の流れ	予想される生徒の反応	留　意　点
・正四角柱や正三角柱でできた，正三角形型の額のような形をしているトーラスの模型を生徒に見せ，この模型づくりをすることを伝える。 	・どのように作るのか，疑問に思う生徒が出てくる。 	
〈正四角柱でできたトーラス〉 ・最初に正四角柱でできたトーラスを作ることを伝える。 ・このトーラスを生徒に見せながら，正四角柱の切り口の角度を問いかける。	・正三角形の内角が60度であることを発言する。 ・正四角柱は30度に切る必要があることに気づく。	
・画用紙は１辺４cm の正四角柱ができるように太線をひいてあることを伝える。 ・画用紙の太線で囲まれた長方形を４つ使えば正四角柱が１つできることを伝えるとともに，切り口の角度が30度になるように作図するように指示する。	・30度の作図にすぐ気づく生徒と気づかない生徒がいる。 	・方眼画用紙３枚，コンパス，はさみを配布する。 ・必要に応じて正三角形や角の二等分線の作図を板書する。
・30度の作図ができたら，切り口の角度が30度になるような四角柱の展開図を作るように指示する。	・１辺８cm の正三角形を上図のように作図し，30度を見つける生徒がいる。 ・別の正三角形を作図し，角の二等分線の作図も利用する生徒がいる。 ・下図のような見取り図を作る。 	・生徒の反応を見ながら，正三角形の作図の仕方について，ヒントを与える。 ・展開図のイメージができない場合は，１パーツを班に１つずつ渡す。 ・作図しないで方眼を利用してもよいことを伝える。

<table>
<tr>
<td>・展開図ができたら，展開図を３つ作図し，はさみで切り取り，組み立てるように指示する。</td>
<td>・立体を作り始める。</td>
<td>・時間の都合を見ながら，３人で１つの模型づくりをするように指示する。</td>
</tr>
<tr>
<td>〈正三角柱でできたトーラス〉
・正三角柱でできたトーラスを作ることを伝える。
・正三角柱でできたトーラスを正面から見させる。
・班に１パーツだけ渡す。そして，パーツの端の部分に注目させる。

</td>
<td>・立面図で考えれば，正三角柱は30度の角度で切ればよいことを認識する。
・パーツを立面図から見たとき，下図のようにとらえられることに気づく。

</td>
<td>・できるだけ生徒に探究させるため，１つのパーツだけ，各班に１つずつ配布して観察させる。
・生徒の状況によって，教師がリードする。</td>
</tr>
<tr>
<td>・実物投影機を用いて，プロジェクタで，下図のような切り口の様子を映像で見せる。

</td>
<td>・パーツを側面から見たとき，上図の青い線分は，下図の青い線分に等しいことをとらえる。

</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>＜２時間目＞
・どのように展開図を作ればよいのか考えさせる。

</td>
<td>・計算で求める方法を考える。


・作図で求める方法が出る。

</td>
<td>・本時においては，展開図の作り方は教師が説明して，生徒が納得すればよいことにする。</td>
</tr>
</table>

・画用紙に，展開図を作るように指示する。 	・画用紙では直角を挟む２辺が４cm，６cm の三角形を作ればよいことに気づく。 ・左図のような展開図を作る。	・画用紙の余白も利用して展開図を作るように指示する。 ・時間を見て，各自は１パーツずつだけ作り，グループで１つのトーラスを作るように指示する。
・展開図を利用して，正三角柱のトーラスを作るように指示する。 **〈円柱でできたトーラス〉**	・トーラスを作り始める。	
・円柱でできたトーラスを作ることを伝える。	・展開図を画用紙から切り取り，パーツを作る。	
・円柱のトーラスを作るための展開図を与え，立体づくりを指示する。	・切り口が楕円になることに気づく生徒がいる。	・円柱が作りやすくするために，展開図の一部を残すように指示する。
・円柱の展開図を改めて見せ，切り口の曲線に着目させる。 ・長ネギを斜めに切る様子を実物投影機で見せる。さらに，切った長ネギの表面だけむいて，広げてみせる。	・サインカーブや，洋服の型紙を思い出す生徒がいる。 ・生徒は，円柱のトーラスの展開図のカーブと長ネギの切り口が同じ曲線になることに驚く。	・グループで円柱のトーラスを作るように指示する。
・円柱の切り口は，２次曲線の学習で学んだことを確認する。 ・円柱の切り口を展開するとサインカーブになることを確認する。	・生徒は，身近な日常の中に数学があることに驚く。	
・洋服の型紙を生徒に見せ，洋裁師が知らない間にサインカーブを利用して型紙を作っていることを話す。 ・最後に，正三角柱の枠でできた正方形の模型を見せ，その展開図を考え，模型の作製を，課題として与える。		・和裁師も同様の技量を持っていることに触れる。

６．計算尺の原理の講義概要

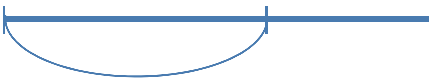
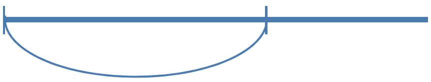
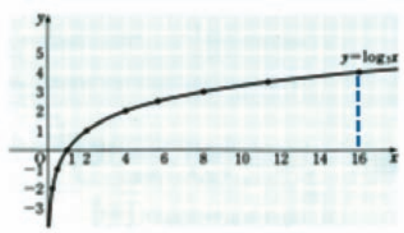
第４章で示したように，指数関数と対数関数が既習知識であれば，学習内容が深めやすい。そこで授業対象を，指数関数と対数関数を学習し終えた高校２年生から大学生までを想定して，計算尺を用いて２数の積と商が求められる原理の理解（２時間）と指数の有理数への拡張と計算尺の尺づくり（１時間）に関する，合計３時間の学習指導案を計画した。本論文では，このうち，計算尺を用いて２数の積が求められる原理の理解と，指数の有理数への拡張の２時間分の学習指導案を示す。この指導の目標は，

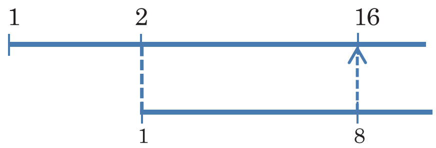
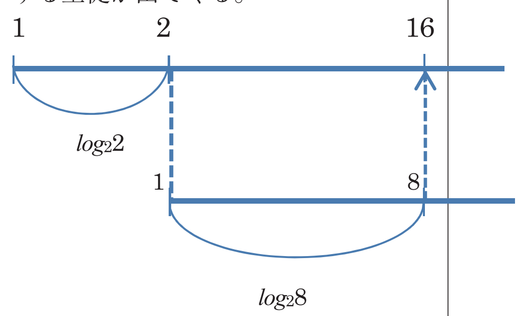
１　指数の拡張の意味やその必要性を実感できるようにする

２　計算尺の計算の原理の理解や実際の計算作業を通して，指数関数や対数関数の特徴を深く理解する

とする。また，準備物は，黒板用定規，実物投影機，プロジェクタ，スクリーン，対数目盛が印刷された画用紙，はさみ，カッター，カッティングボード，透明塩ビ板，ルートキー（$\sqrt{\ }$）付き電卓（関数電卓でない方が望ましい）である。

＜学習指導案＞

学習指導の流れ	予想される生徒の反応	留　意　点
＜計算尺を用いて２数の積が求められる原理の理解＞ ・電卓が普及していない時代に，かけ算やわり算の積や商の概数をとらえる道具として，計算尺があったことを伝える。また，計算尺の原理を学習することを伝える。 ・例えば定規を２本使うと２つの長さの和や差が求められる。計算尺でも，同じ尺を２本使って，和や差を求める原理を使うことによって，積や商を求めていることを伝える。 ・尺の目盛りは，尺の左端からの距離が log_2M の距離にある地点に，目盛り M を打ってあることを伝える。ただし，本授業では，底は２の場合で説明することも伝える。その上で，下図を見せる。		
M  log_2M	・尺の目盛りの振り方の原理を理解する。	・尺の目盛りの振り方の原理が分からない生徒がいる場合は，丁寧に指導する。
・尺の左端の目盛りはどんな数になるのか発問する。その上で，その理由も考えるように促す。 ・反応がない場合は，対数の定義「$log_21=0$」に着目するように促す。 ・尺の左端の目盛りが１になることを確認する。 1　M  log_2M	・０と答える生徒がいる。 ・１と答えられる生徒もいる。 ・左端の目盛りは，左端からの距離が0になるから, $log_2M=0$になる M が目盛りに書かれなければいけない。だから $M=1$であると，答える生徒がいる。	
・教科書の関数 $y=log_2x$ のグラフを利用して，尺をつくることを伝える。そして，このグラフを用いて，尺にどのように目盛りを打てばよいか，考えるように指示する。	 ・生徒は，目盛りの振り方の原理と，この関数のグラフを見ながら，考えはじめる。 ・なかなか気づけない生徒もいる。	

・目盛り16の打ち方が理解できたかどうか確認する。	・例えば，$x=16$の時のyの値が$log_2 16$であることを指摘し，上図の点線の長さを，尺の左端からとった地点に目盛り16を打てばよいのではないか，と発言する。	・十分に理解できていない生徒がいる場合は，繰り返して確認する。
・目盛りの打ち方が分かったことを確認したら，実際に尺をつくるように指示する。また，同じ尺を２本つくることも伝える。	・生徒は，関数$y=log_2 x$のグラフを利用しながら，尺を作り始める。	・尺のために細長く加工した画用紙を配布する。
・２本の尺を使って，2×8の計算する方法を説明する。 ・１つ目の尺の目盛り２の所に，二つ目の尺の目盛り１を合わせる。次に，２つ目の尺の目盛り８の所を見つけ，１つ目の尺の目盛りを読むと16になることを，黒板用につくった尺を利用しながら説明する。  	・２本の対数目盛がふられた尺を使うだけで，２数の積が求められることに驚く生徒がいる。	
・なぜ，このような手順で，2×8の積が求められるのか，考えるように指示する。 ・分からない生徒がいる場合は，尺の目盛りの振り方にヒントがあることを伝える。	・尺の目盛りの振り方を再確認する。そして，目盛り２であれば，尺の左端からの距離が$log_2 2$，目盛り８であれば，尺の左端からの距離が$log_2 8$であることに気づく。 ・目盛りは真数であることに気づく生徒もいる。	
・尺の目盛りの振り方を確認して分かったことを，この図の中にかき込むように指示する。 ・生徒が気づいたことを発表するように促す。	・板書されている尺の教具の様子をノートに写しながら，下図のような図示をする生徒が出てくる。  ・中には，$log_2 2+log_2 8$の計算を，自作の計算尺を使ってはじめる生徒もいる。 ・目盛り16は，尺の左端からの距離が$log_2 16$であることにも気づく。	

・生徒の気づきをまとめる。 ・目盛りが真数になっていること，２つの尺を利用して，指数の加法を導いていること，自分たちがつくった計算尺は底が２の場合のものであること等をまとめる。 **＜指数の有理数への拡張と計算尺の尺づくり＞** ・本時は，２の累乗が０以上の整数だけでなく，負の整数や分数の場合の目盛りの打ち方について，考察することを伝える。	・$\log_2 2+\log_2 8=1+3=4$と考える生徒がいる。 ・$\log_2 2+\log_2 8=\log_2 16$であると考える生徒もいる。 ・真数が２，８，16であることを指摘する生徒がいる。 ・1＋3は，２の指数の和2^{1+3}を示していることを指摘する生徒もいる。	・極力多くの発言を引き出す。
・これまでの復習から，Mの目盛りは，尺の左端から$\log_2 M$の長さの所に打てばよい。だから，例えば目盛り３は，尺の左端から$\log_2 3$の長さの所に打てばよい。$\log_2 3$は，$2^x=3$のxのことだから，有理数xに対する，2^xの表をつくることにより，近似的に$\log_2 3$の値が求められることを伝えた。 ・指数が単位分数の最も簡単な，$2^{\frac{1}{2}}$について考察することを伝える。	・数学的意味を理解する。	・この理解に時間がかかる生徒がいると予想されるので，丁寧に指導する。
・指数法則から，$2^{\frac{1}{2}}$の２乗は２であるから，$2^{\frac{1}{2}}$をyとおけば，$y^2=2(y>0)$となる。このようなyの値を求めるように指示する。	・生徒は平方根の定義を思い出して，$y=\sqrt{2}$であると，答える。 ・生徒によっては，電卓を用いて$y=$1.414……となることを確認する。	
・分かったことを利用して，尺の左端からどのぐらいの距離の所に，どんな目盛りを打てばよいのか，考えるように指示する。	・生徒は，尺の左端から$\dfrac{1}{2}$の長さの所に，1.414……と目盛りを打てばよい，と気づく。	
・次に，$2^{\frac{1}{3}}$の３乗は２であるから，$2^{\frac{1}{3}}$をyとおいて，yを求めるように指示する。このとき，また，その近似値も求めるように指示する。	・$y^3=2(y>0)$から，生徒は，$y=\sqrt[3]{2}$であると考える。 ・生徒は，電卓を用いて，$y=$1.2599……となることを確かめる。	
・計算の結果から，尺の左端からどのぐらいの距離の所に，どんな目盛りを打てばよいのか，考えるように指示する。	・尺の左端から$\dfrac{1}{3}$の長さの所に，1.2599……と目盛りを打てばよいことを，発言する。	

・この作業を続けていき，$2^{\frac{1}{n}}$ を y とおけば，$y^n=2(y>0)$ となるので，同様に計算をしていけば目盛りが打てることを確認する。 ・次に，指数が単位分数ではない場合についても検討することを伝える。	・生徒は納得する。	
・指数法則から， $2^{\frac{m}{n}}=2^{\frac{m}{n}}=\underbrace{2^{\frac{1}{n}}\times 2^{\frac{1}{n}}\times\cdots\cdots\times 2^{\frac{1}{n}}}_{\text{m 個}}$ で決まることを確認する。	・指数法則を思い出し，納得する。	
・例えば， $2^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{1}{3}}=1.2599\cdots\cdots\times 1.2599\cdots\cdots$ で求められることを確認する。	・$2^{\frac{2}{3}}$の概数が求められることに気づく。	
・このように考えていけば，指数 x が正の有理数の範囲で2^x が求められ，尺の左端から長さ x における目盛りが得られることを伝える。	・生徒は尺の左端からの長さが正の有理数 x の位置に，打つべき目盛りが見つけられることを納得する。	

7．おわりに

本研究は，平成28年度に実施した第３期の「科学・技術者の発掘・養成講座」における数学領域講座の概要の一部として，展開図を自ら考えてつくる立体模型と，計算尺の講義概要を示すとともに，それらの学習内容をもとに，上級学年での教材化を行い，その学習指導計画の概要を示した。次世代科学者養成プログラムでは，受講者にとっては，発展的で未知の学習の内容であっても，必要に応じて知識を追加して，数学的な定義や性質を明確にしていくことで，十分に学習が成り立つことが，数学領域講座での指導概要から，明らかにできた。こうした事実は，学習とは，学校教育のカリキュラムに沿った教育だけではないことを如実に明示している。

一方，こうした挑戦的な学習の成果として，三平方の定理や三角関数，指数関数や対数関数を学んだ生徒や学生を対象とした，学習指導案の作成も可能であることを明らかにできた。正三角柱を利用してできる立体の学習指導案では，立体の内部に，立体を構成する面とは別に，仮想的な面を考えていく点に着眼した指導を意識した。このような補助面を意識した数学的洞察力は，初等幾何を中心とする学習場面で有用な活動であると考えられる。この指導については，既に高等学校３年生を対象に実践しているが，さらに学習指導案に修正を加えた上で，実践を重ねて行きたい。また，計算尺の学習指導案では，指数関数や対数関数を学習する高校２年生程度から大学の初学者を対象とした。特に，対数は指数関数の逆関数として定義されているが，その必要性を実感できている高校生は少ないのが現状である。したがって，理工系の大学に通う学生の中にも，十分な理解がなされていないままで対数を活用している可能性がある。計算尺が加法や減法の原理をもとにしてつくられていることを知り，そこに対数の性質がうまく利用されていることを理解できれば，この学習指導案のねらいを達成できることになると考えている。計算尺に関する学習指導案に沿った実践授業はこれからであるが，高校２年生程度から，大学の初学者を対象とした授業実践を行っていく予定である。

本研究で示した学習指導案は，数学の授業を想定したものであるが，内容的な側面から考えれば，総合的な学習場面での活用も視野に入れることが可能である。このことも明らかにするために，本研究で示した学習指導案に沿った授業実践と，その分析・考察を，今後の大きな課題としてとらえている。

参考文献

金児正史，成川公昭，平野康之,「科学・技術者の卵を育成する「科学・技術者の発掘・養成講座」の展開－数学領域におけるプレマスターコースの学習内容－」，鳴門教育大学研究紀要第30巻，2015, pp. 90－100.

計算尺推進委員会　Retrieved from http : //www/pl-sliderule.net/（2017. 8. 11）

再訂中学新数学第１学年（中学校数学科用），啓林館，1968，pp. 238－244.

数学Ⅱ（高等学校数学科用），数研出版，2011，pp. 153－176.

Case Study of Teaching Materials on Consideration about the Net of the Torus and on Principle of the Slide Rule

KANEKO Masafumi*, NARUKAWA Kimiaki** and MIYAGUCHI Tomoshige**

(Keywords : advanced scientific lectures, net of the torus, slide rule)

The advanced scientific lectures, in which the contents the learners had not yet learned are utilized, have been held in Naruto University of Education from 2013. The number of the students who finished the learning was almost one hundred in the previous course. Three students who were in the 5 th, 6 th and 7 th grade joined the advanced mathematics lecture course in 2016. In this paper, we show the contents of mathematics lecture course the three students attended, especially the consideration about the net of the torus and the principle of the slide rule. Through the experience of teaching them in the advanced mathematics lecture course, we reconstruct teaching materials – the net of torus and the principle of the slide rule – for higher grade school students. We also show teaching plans for the upper school year students in this paper. We already held the lesson of the net of the torus for high school students according our teaching plan. In our future work, we will try to make the lesson of the principle of the slide rule in high school and university, and we would like to discuss about teaching materials and teaching plans.

*Advanced Educational Practitioner . Naruto University of Education
**Natural Science Education (Mathematics). Naruto University of Education