鳴門教育大学研究紀要
第33巻　2018

確率統計学に関する中学校授業実践例：ベンフォードの法則のマルコフ近似

宮　口　智　成

（キーワード：確率統計学，ベンフォードの法則，中学校授業実践）

Ⅰ．背景と目的

１．はじめに

ベンフォードの法則は等比数列の先頭の数字の統計性を特徴づける法則である。世界の国々の国内総生産（GDP）や農産物の生産量など，身近な事象の中にもベンフォードの法則の例が数多く見られるため（Benford，1938），学校教育における教材としての利用が期待される。実際，高校生向けの興味深い題材として，ベンフォードの法則はこれまでも広く利用されてきた（井ノ口，2006）。しかし，ベンフォードの法則の証明には常用対数を用いるため［式⑴を参照］，高校数学の知識が必要である。したがって，中学校の授業で使用することはこれまで困難であった。

そこで，ベンフォードの法則を中学校の授業で利用するために，その近似理論を構築した（ただし，ベンフォードの法則は公比が１以上の任意の等比数列に対して成立するのに対し，近似理論は２のべき乗にのみ適用できる）。具体的には，先頭の数字の遷移をマルコフ連鎖として数理モデル化し，マルコフ連鎖の定常状態としてベンフォードの法則の近似値を導出した。この近似理論については，第Ⅱ節で解説する。

この近似理論の結果を用いて，鳴門教育大学附属中学校２年生に対し計３回の授業実践を行ったが（2012年・2013年・2014年），いずれ場合も非常に好評であった。授業では，「２のべき乗数」の先頭の数字の度数を（２の100乗まで）実際にカウントし，それを近似理論の結果と比較した。また，世界の国々のGDPについても先頭の数字の頻度分布を作成し，ベンフォードの法則に従っていることを確認した。この他にも，大学の授業（確率・統計学）や教職大学院の授業（数学の専門性と教育）などでもこの教材は利用しているが，興味深い内容であるとの意見が多かった。実際の授業の流れは第Ⅲ節で紹介している。

２．ベンフォードの法則

ここでは，ベンフォードの法則の厳密理論を紹介する。ただし，ベンフォードの法則［式⑴］は高校程度の数学で導くことが可能であるが，よく知られた結果であるのでここではその導出は省略する。例えば，井ノ口（2012）などの文献を参照されたい。

増大する等比数列 ar^n （$n = 0, 1, 2, \ldots ; a > 0 ; r > 1$）に対して，$P_m$ を「先頭の数字が m である確率（あるいは相対度数）」と定義する。簡単な解析により，

$$P_m = \log_{10}\left(\frac{m+1}{m}\right) \qquad (1)$$

（$m = 1, 2, \ldots, 9$）であることを示すことができる。これは，任意の初項 $a > 0$ と公比 $r > 1$ に対して成立するため，非常に普遍的な法則である。ベンフォードの法則［式⑴］を，図１に実線で示した。この図１から分かるように，小さい数ほど出現頻度が高く，大きな数になる程出現頻度が単調に減少することが分かる。また，高校までの学習内容で対数関数の応用は化学における pH（水素イオン指数）など，非常に限られていることから，対数関数の身近な応用例として高校生に紹介することにも意味があると考えられる。

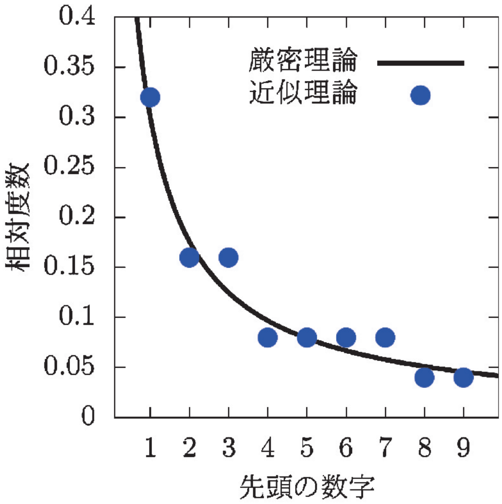

図1．ベンフォードの法則の厳密理論［式(1)］を実線で，近似理論［式(2)］をプロット（●）で示した。

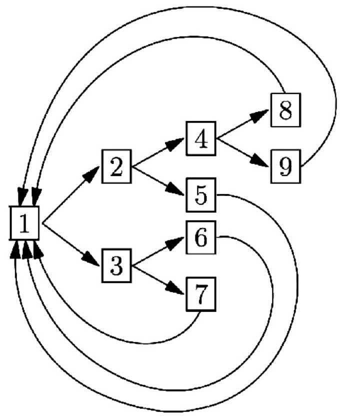

図2．２のべき乗の先頭の数字に関する状態遷移図。$\boxed{m}$は先頭の数字を表しており，矢印は２倍したときの遷移の仕方を表している。

Ⅱ．ベンフォードの法則のマルコフ近似

1．マルコフ近似理論

ベンフォードの法則は式(1)のように常用対数を用いて表される。また，その導出も高校の数学程度の知識で十分理解できるから，高校生向けの大変興味深い教材である。一方で，そのままの形で中学生を対象に用いることはできない（中学生はまだ対数を習っていないので）。ここでは，ベンフォードの法則を中学校において教材として利用するために構成した近似理論を紹介する。ただし，ベンフォードの法則では公比 r は１より大きい任意の実数であるが，ここでは $r=2$ の場合のみを考える。

まず，数を２倍したときの先頭の数字の移り変わり（以下では遷移と呼ぶことにする）を考えてみる。先頭の数字が$\boxed{1}$である数を２倍すると，先頭の数字が$\boxed{2}$か$\boxed{3}$の数が得られる。同様に先頭が$\boxed{2}$の数字は２倍すると先頭の数字は$\boxed{4}$か$\boxed{5}$になる。以下，同様に考えると，先頭の数字の遷移は図２のように表すことができる。この図２を状態遷移図と呼ぶことにする。すなわち，先頭の数字$\boxed{1}$から$\boxed{9}$が９つの状態に対応して，２倍したときの先頭の数字の遷移を，状態間の遷移と見なして矢印で表現しているのである。

図２から分かることは，$\boxed{1}$の状態に遷移する矢印が多いことである。実際，先頭の数字が$\boxed{5}$，$\boxed{6}$，$\boxed{7}$，$\boxed{8}$，$\boxed{9}$である数を２倍すると，先頭の数字は必ず$\boxed{1}$になる。このように，$\boxed{1}$へ遷移する矢印が多いことが，$\boxed{1}$の出現頻度が高いことの直感的な理由である。このような定性的な理解は，数学的にモデル化することにより定量化することができる。

ところで，状態遷移図（図２）において，２つの数に分岐する場合に，１／２の確率でそれぞれの数に遷移すると仮定する（もちろんこれは問題の単純化であって，必ずしも正しいわけではない）。すると，P_m の間に

$$P_2=\frac{P_1}{2},\quad P_3=\frac{P_1}{2},\quad P_4=\frac{P_1}{4},\quad P_5=\frac{P_1}{4},$$
$$P_6=\frac{P_1}{4},\quad P_7=\frac{P_1}{4},\quad P_8=\frac{P_1}{8},\quad P_9=\frac{P_1}{8}$$

という一連の関係が成立する。一方で，確率の規格化条件より，

$$P_1+P_2+\ldots+P_9=1$$

であることが必要である。以上の連立方程式は容易に解けて，

$$P_1=\frac{4}{13},\quad P_2=\frac{2}{13},\quad P_3=\frac{2}{13},$$
$$P_4=\frac{1}{13},\quad P_5=\frac{1}{13},\quad P_6=\frac{1}{13},\qquad (2)$$
$$P_7=\frac{1}{13},\quad P_8=\frac{1}{26},\quad P_9=\frac{1}{26}$$

という結果が得られる。この近似理論の値を図１にプロット（●）した。ベンフォードの厳密理論（実線）と比較すると，かなりよく一致していることが分かる（近似理論では対数関数を一切用いていないこと，および極めて初等的な計算で導出できたことに注意）。このように，数学的なモデル化と数学解析を用いることで，実験的に発見された現象を定量的に説明することができる。このような経験を通して，数学の有用性を実感できるのではないかと考えられる。また，状態数を増やすことで，より精密な近似に改良することも可能である（ここでは省略する）。

２．マルコフ近似について

上記の近似理論では，「分岐する場合の状態間遷移が等確率で起きる」ことを仮定している。しかしそれ以外にも，状態間遷移が過去の履歴に依らないことを仮定している。このような（過去の履歴に依らないという）性質を確率過程論ではマルコフ性と呼ぶ（シナジ，2012）。つまり，先頭の数字の遷移を「マルコフ連鎖」と呼ばれる確率過程で近似していることになる。そして，９つの先頭の数字は，マルコフ連鎖の９つの状態に対応し，上の確率 P_m はマルコフ連鎖の定常確率に対応している。

このようなマルコフ近似がある程度有効であるのは，２のべき乗は正のリアプノフ数を持つ写像力学系であることに起因すると考えられる。このように，マルコフ近似の考え方や，それが有効である理由はかなり高度な数学と関係するため，中学校の授業では一切触れてはいない（大学の授業でもほとんど触れていない）。これまでの授業で，近似理論においてマルコフ近似をしていることに気付いたり，疑問を持つ生徒や学生はいなかった。

Ⅲ．実際の授業

ここでは，鳴門教育大学附属中学校で行った授業の流れを簡単に紹介する。授業は計100分（50分×２コマ）であった。

１．統計的活動１：２のべき乗　（実験）：

「度数を数えること」は最も基本的な統計的活動である。そこで，授業ではまず，2^1から2^{100}までの数のリストを渡し，その先頭の数の出現頻度を数えることから始めた。その結果を度数分布表と相対度数表にまとめ，さらに相対度数の図をかいた。単純作業であるが，ほとんどの生徒が集中して作業を進めた。実際に得られた結果を図３にプロット（●）で示した。

２．原因の推論と定性的理解（仮説の設定）

次に，「なぜ先頭の数字には１が多く９が少ないのか」，をヒント無しに考えるように指示した。すると，何人かの生徒から，「２倍すると先頭の数字が１になるケースが多い」という意見が得られた。このような意見を聞くことで，他の生徒もよく理解できたようであった。したがって，この段階で既に生徒は「定性的に現象を理解できている」と言えるが，もう一歩進めて「定量的に現象を理解する」には，数学的なモデル化と数理解析が必要である。

あるいはこの段階は「２倍すると先頭の数字が１になるケースが多い」ことが「小さい数の出現頻度が高いこと」の原因である，という仮説を設定したと考えることも可能であろう。この仮説の検証にはやはり数学を用いた定量的な解析が重要となる。

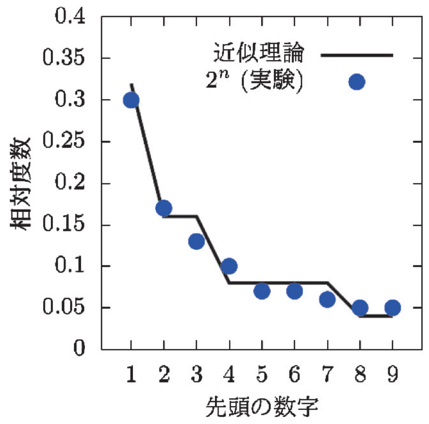

図３．ベンフォードの法則の近似理論［式(2)］を実線で，2^nの先頭の数字の頻度分布をプロット（●）で示した。

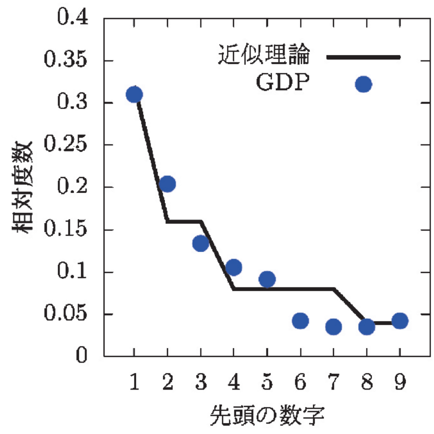

図４．ベンフォードの法則の近似理論［式(2)］を実線で，世界の国々（上位142ヶ国）のGDP 値の先頭の数字の頻度分布をプロット（●）で示した。

３．数理モデルの構成と定量的理解（仮説の検証）

まず，状態遷移図（図２）を生徒自身に描いてもらった。この図は，先頭の数字が２倍することでどのように遷移するかを表している。最初に先頭の数字が１の数から２および３の数へ遷移することを説明すれば，ほとんどの生徒が状態遷移図を正しく完成させることができた。

その上で，確率 P_1から P_9について成立する方程式を導出するように指示した（確率は学習前であったので，実際には P_m は「割合」として導入した)。まず最初に，「矢印が２つに分岐する部分では，確率１／２でどちらかに遷移すると仮定すること」を説明した。この部分では，作業に必要な時間に若干の個人差が出たが，最終的に全ての生徒が方程式を立てることができた。さらに，導いた連立方程式を解きベンフォードの法則の近似理論［式(2)］を得た。

最後に，相対度数の図をかき，実際に2^nの先頭の数字を数えることで得たデータと比較し，良く一致していることを確認した。これらの数理解析により，現象を定量的に説明（理解）できたことになる。このような定量的な予測ができることは，数学がはたしている重要な役割の一つである（あるいは逆に，「現象との定量的な一致」は数理モデルの妥当性の根拠でもある)。

また，ここまでの流れは，「実験」→「仮説の設定」→「仮説の検証」という自然科学研究の基本的なアプローチに従っていると考えることもできる。したがって，科学的探求が（疑似的に）体験できる教材と言って良いかもしれない。

４．統計的活動２：世界の国々の GDP（実験）

最後に世界の国々の GDP を用いて，現実のデータ解析を行った。世界の国々（上位142ヶ国）の GDP 値の表を渡し，２のべき乗の場合と同様に，先頭の数字の度数（出現頻度）を数え，頻度分布を作成するように指示した。図４に示してあるように，GDP 値の先頭の数字の頻度分布は，ベンフォードの法則に非常に近い。このような現実のデータの中にもベンフォードの法則を見出せることは，非常に驚きである。さらに，ベンフォードの法則が会計監査に利用されていることにも言及した（Nigrini，2012)。このような例を通して，数学により様々な自然現象や社会現象を記述できることを生徒に伝えることができれば，数学への興味をさらに引き出すことができるかもしれない。

GDP の値がなぜベンフォードの法則に従うのかを説明するのは難しい。授業では，まず GDP の変化，例えば今年の GDP を昨年の GDP と比較する際に，ニュースなどでどのように報道されているか，を尋ねた。GDP の伸び率は通常パーセントで示される（授業でも，そのような意見が得られた)。例えば，伸び率が３％というのは，「昨年の値から1.03倍になった」ということである。このような GDP の伸び率は年ごとに多少の変動はあるものの，おおよそ一定と考えることができそうである。そのように仮定すれば，このようにして得られる数の列は最初に考えた等比数列と同じであることが分かる。

5．受講生からの意見

大学と大学院の授業で上記の教材を利用した際の意見をいくつか紹介する。「ベンフォードの法則は身近な題材で，しくみもある程度単純化すると中学校の知識でも理解することができ興味深かった」「先頭の数字という一見ランダムそうなものに法則が隠れていたことは驚きだった」「先頭の数字の相対度数を求める問題は面白かったです」。同様の意見が多数得られている。

Ⅳ．まとめ

本論文では，ベンフォードの法則のマルコフ近似理論を構成することで，中学校段階でも使用できる確率統計学に関連する題材を作成した。この題材を利用する利点については本文中にも適宜記述してきたが，ここでそれらをまとめておく。

1．近似により，非常に簡単な数学でベンフォードの法則の本質を理解できるようになった。本来高度な数学を必要とする数学理論でも近似的に扱うことで，比較的に簡単な数学で現象の本質が理解できることがあるのである（同様の例として，例えば単振り子の近似としての調和振動子が有名である)。ここでの例のように，近似理論が学校教育において活用できる他の例を探すことも重要であると考えている。
2．また，近似という考え方を知ること自体も重要であると考えられる。「近似」という作業は，現象の本質を見抜き，本質的でない部分を無視する，というかなり高度な思考様式が必要なのである。
3．さらに，中学校の段階で「高校で習う対数という関数を使用すれば，より精密な結果が得られる」ことを知ることで，高校の数学への興味も湧くはずである。
4．授業の流れが，「実験」→「仮説の設定」→「仮説の検証」という自然科学研究の基本的なアプローチに従っている。また，統計的活動と確率論的解析がともに含まれている点も重要であると考えている。
5．最後に，この題材と通して「注目している現象を数学的にモデル化することで，定量的な予測ができるようになる」ことを実際に体験できる。「定量的な予測ができること」は，数学の大きな魅力の１つであり，数学への興味や関心を引き出すことにつながることが期待できると考えている。実際に，鳴門教育大学附属中学校や大学・大学院の授業において, この近似理論を用いた授業を行ったが, 興味深いという意見が多数得られた。

参考文献

井ノ口順一：“先頭の数字は？”，数学セミナー，８月号，2012, pp. 8－13.

井ノ口順一，黒﨑貞雄：“「ベンフォードの法則」の授業について”，宇都宮大学教育学部教育実践総合センター紀要，第29号，2006, pp. 117－121.

R.B.シナジ著：“マルコフ連鎖から格子確率モデルへ”，丸善出版，2012，pp. 1－264.

F. Benford : “The law of anomalous numbers”, Proceedings of the American Philosophical Society, 78, 1938, pp. 551－572.

M.J. Nigrini : “Benford’s law”，Wiley，2012, pp. 1－330.

Practice on Probability and Statistics in Junior High School : Markovian Approximation of Benford's Law

MIYAGUCHI Tomoshige

(Keywords : Probability and Statistics, Benford's law, Junior high school)

Benford's law appears in many natural and social phenomena. It has been used as an interesting material for high school students. Here, to use the Benford's law in junior high school, its Markovian approximation is developed. An outline of the lesson given in the attached junior high school of Naruto University of Education is also presented.