

徳島県高等教育機関連携型「ジュニアドクター発掘・養成講座」 における数学領域の指導の実際

～立体模型づくり、さおばかりづくり、さおばかりの原理の証明～

宮 口 智 成*, 金 児 正 史**, 成 川 公 昭*

(キーワード: 立体模型作り, さおばかり, てこの原理, 数学的帰納法, ジュニアドクター発掘・養成講座)

1 ジュニアドクター発掘・養成講座の概要

鳴門教育大学は、平成29年度に、国立研究開発法人科学技術振興機構（以下、JST）が公募した新規プログラム「ジュニアドクター養成塾」に応募し、「徳島県高等教育機関連携型『ジュニアドクター発掘・養成講座』～社会を牽引する未来の科学技術者を徳島から育てよう～」(以下、ジュニアドクター発掘・養成講座)として採択され、平成29年度後半から本格的に活動をはじめた。ジュニアドクター発掘・養成講座は、鳴門教育大学を中核機関として、徳島大学、徳島文理大学、四国大学、阿南工業高等専門学校及び徳島県教育委員会、徳島市教育委員会、鳴門市教育委員会と協働して、地域の教育機関、大学教員、科学技術分野の関連機関、専門家等と連携しながら、理数・技術（情報）領域に高い意欲と才能を持つ小学校5年生から中学校3年生を対象とする、問いの資質・能力（探る・極める・発見する；自ら問いを見出して探究する資質・能力）を重視した幅広い科学技術分野の専門研究における探究活動を取り入れた教育プログラムである。ジュニアドクター発掘・養成講座は、各教育委員会、小中高の理数技術の教員との連携を重視し、自ら考え、手を動かし、広い視野から探究し、成果を伝えるコミュニケーション能力も育む教育の実践ともいいかえることができる。受講者は希望調査を提出の上、面接によって決定した。受講者は第1年次に研究基礎コース(20回)の講義を通して、医学、物理、化学、生物、地学、数学、情報等の各分野の学習を積み上げた。また、平成30年度は、第1年次の講座のうち、さらに高度な学習を行いたい講座を希望した受講生が、改めて面接を受けて、研究標準コースの講義を受けている。本稿では、鳴門教育大学が平成29年度に実施した、ジュニアドクター発掘・養成講座における研究基礎コースの数学領域の指導内容（4講義、360分）を示すとともに、40名の小中学生の活動の様子および変容について報告する。

2 ジュニアドクター発掘・養成講座における数学領域で取り扱った課題

2回実施した数学領域の講義内容は、柱体で正三角形形状の枠をつくる立体模型づくりと、さおばかりづくり、さおばかりの原理の探究である。受講生は小学校5年生から中学校3年生であり、学校教育で習得した知識・技能を含む資質・能力は多様である。こうした状況を踏まえて、上記の学習教材は、受講生の身近にある素材でありながら、数学的に探究できることを意識して取り上げた。2章ではこれらの講義内容の概要を示す。実施時期は2017年12月と2018年1月である。

(1) 柱体でつくる立体

正四角柱を利用して、正三角形形状の立体を作る作業、正三角柱を利用して、正三角形形状の立体模型を作る作業を、受講生が試行錯誤しながら行った(図1)。さらに、円柱で同様の立体ができることを、円柱の展開図を利用し、実際に立体模型を作ることで確認した。また、切り口の展開図の曲線や立体の形状について、講義した(図2、4)。なお、柱体で作る立体の活動の詳細は、鳴門教育大学研究紀要第33号(参考文献(1))に詳しく記述しているので、本稿ではその概要だけ示す。



図1 作成した立体模型

*鳴門教育大学 自然・生活系教育部

**鳴門教育大学 基礎・臨床系教育部

図2（左）の、正四角柱を用いて正三角形の立体を作るとき、正四角柱を切り出す角度は30度である。受講生には角の二等分線の作図の方法も伝え、正四角柱から切り出す立体の展開図を作図するように指示した。

引き続いて、図2（右）のように、正三角柱を用いて正三角形の立体を作った。そしてこの立体の、図3（右）の写真のような正射影の図形を考えるように指示した。

受講生は、切り口の角度は30度であるが、正三角柱の展開図では、切り口は30度よりも大きな角になっていなければならないことに気づき、どのようにその展開図を作ればよいか、考え始めた。しかし多くの受講生は自力で解決できなかった。そこで筆者らは、図3のように、正三角柱を側面から見た図に、正射影の高さに該当する線分 AB をかき加え、正三角柱を用いて作った正三角形の立体の正射影の図形では $\angle ACB$ が30度になっていることを伝えた。これをヒントにして、中学校3年生を中心に三平方の定理を利用しながら、正三角柱でできる立体の展開図を作り始める受講生もいた。また、作図によって図3の線分 BC を見つけ出して、展開図を作る受講生

も出てきた。こうした考えが受講生同士の議論を通して共有できるようになると、彼らはその展開図の作図に夢中になっていった。さらに、円柱を用いて正三角形の立体も作れることを伝え、その展開図を受講生に配布して、立体を作るように指示した（図4）。受講生はこの展開図を画用紙から切り出すと、正三角形の立体を作り始めた。その後、展開図の曲線は三角関数のグラフになっていること、図4の展開図から円柱を作ると、その切り口は楕円になっていること、その切り口は長ネギなどの円柱状の立体を斜めに切った切り口と同じ形状になっていること、洋服の肩口の型紙の曲線も三角関数のグラフになっていることなどを伝えた。

(2) さおばかりづくり

さおばかりづくりでは、最初に江戸時代に使われていたさおばかりの写真を見せ、重さのはかり方を説明した（図5）。その後、角材、糸、洗濯バサミ、おもりにする5円玉10枚を用いて、3人1組になって、紙の枚数を求めるさおばかりづくりをするように指示した。さらに、さおに目盛りを打っていく作業を通して、さおばかりにどんな規則性があるか発見するように指示した。さおばかりづくりでは、さおが水平になるようにおもりを動かし、その地点に目盛りを打つのだが、おもりの加減で、さおが急に動いて危険な場合があることを伝えてから、作業を始めた。また、さおが水平になったかどうか確認する作業の際に、机の側面や黒板のチョーク受けなど、教室内の水平な場所を利用して作業するように指示した。

作業に入る際には、支点をどこにとるか、各班で自由に決めるように指示した。図5の写真を参考にした班が多く、最初は多くの班が支点をさおの端のほうにとっていたが、支点をさおの midpoint 付近にとった班もあり、それでは多くの紙の枚数が求められないことを、体験を通して気づいていた。また、紙の枚数を1枚ずつ数えるさおばかりを作ろうとする班があったり、10枚ずつ数えるさおばかりを作ろうとして、支点の位置を様々にとったりし、多様なさおばかりが完成した。

(3) さおばかりの原理の考察

てこの原理を数学的に考察する学習を行った。具体的には以下に示すように、アルキメデスによる議論（参考文献(2)）を採用し、思考実験を通し、公理的にこの原理を見直すことを体験させた。その学習に先立って、

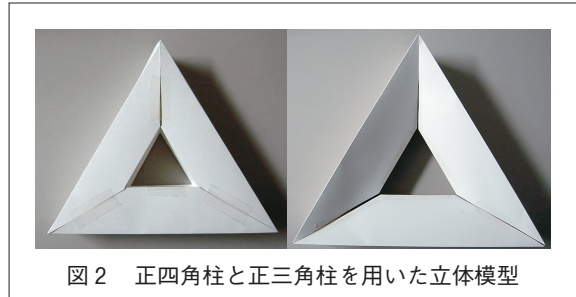


図2 正四角柱と正三角柱を用いた立体模型

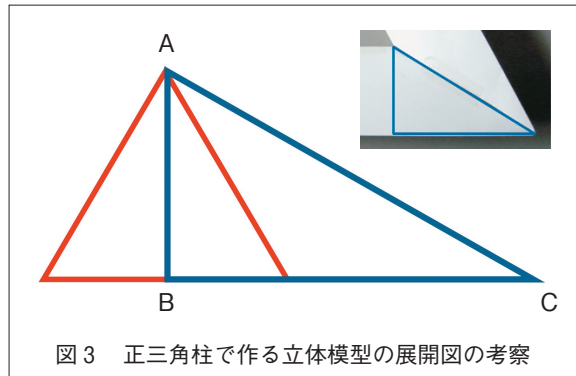


図3 正三角柱で作る立体模型の展開図の考察

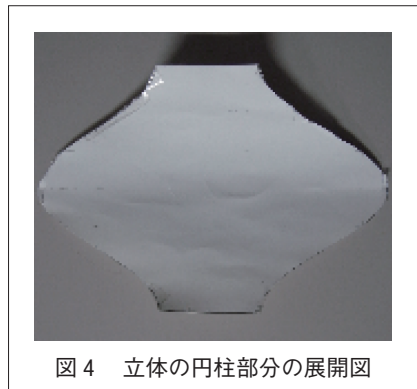


図4 立体の円柱部分の展開図



図5 江戸時代のさおばかり

さおばかりの公理を4つ示し、その内容を説明してから、さおばかりづくりで見いだした性質を、定理として証明していくことを伝えた(図7)。その際筆者らは、受講生に、「数学では公理をもとに定理を証明し、さらに新たな定理を証明していく思考過程が重要」であり、本講義では、この過程を実体験してもらうことを伝えた。そして公理とは、証明せずにその内容を正しいこととして認めることがらであると伝えた。また、証明の過程で、重さがないさおと、重さがあるさおを考えるので、重さがあるさおは、太く表現していることも伝えた。上記の公理を使って、次の定理1の証明を皮切りに、てこの原理を導出することを試みた。

定理1の証明は、公理1から公理3を活用して、受講生に次のように提示した。

定理1 大きなおもりを $a(g)$ 、小さなおもりを $\frac{1}{2}a(g)$ とすれば、そのさおは図9のようなときにつり合う。

〈定理1の証明〉

重さのないさお1の左端に $a(g)$ のおもりをつけ、右端に $\frac{1}{2}a(g)$ のおもりを2つつけたとき、**公理2**より、さお1はつり合う。次に、さお1の右端につけた2つのおもりを、重さのないさお2の両端につける。ここで、さお2の長さは、さお1の長さと同じであるとする。このさお2の中点を、図8のように、さお1の右端につなぐ。

このとき、**公理1**から、重さのないさおの中点に支点をとり、さおの両端に同じ重さのおもりをつけるとつり合うので、図8のような、さお1とさお2でできたさおはつり合う。

さらに、さお2を、さお1に限りなく近づけると、図9のようになる。ここで、2本のさおを、(重さのない)紐でしばり、ずれたり離れたりしないようにする(すなわち、2本のさおを1本のさおとみなせるようにする)。このとき、さお2の左端にあった $\frac{1}{2}a(g)$ のおもりは、「あわせたさお」の支点の下にあるから、**公理3**より、このおもりはなくてよい。このことから、図10のように考えてよい。

(証明終わり)

定理1の証明後、図10について、等しい長さを l としてかき直してみると、図11のように表せることを確認するとともに、今後の証明では、長さや重さの単位は表記しないことも伝えた。

定理2の証明は、定理1で証明した内容を利用して、受講生に次のように提示した。

公理1 重さのないさおの中点に支点をとり、さおの両端に同じ重さのおもりをつけるとつり合う。

公理2 重さのないさおの中点に支点をとり、さおの両端に同じ重さのおもりをつけるとき、一方のおもりの重さの合計がもう一方のおもりの重さと等しいならばつり合う。

公理3 重さのないさおを用いて公理1の状況をつくる。ここでさらに、中点に任意の重さのおもりをつけてもつり合う。

公理4 重さがあるさおの中点に支点をとり、さおの両端に同じ重さのおもりをつけるとつり合う。

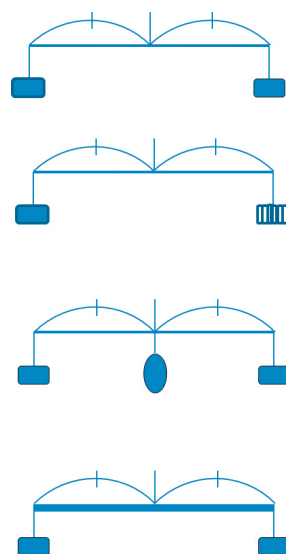


図7 てこの原理を考えるための公理

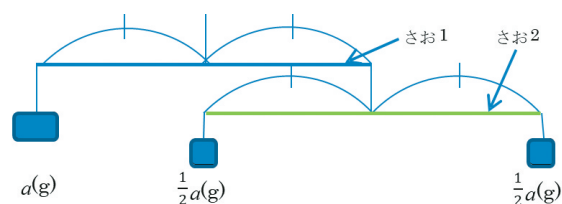


図8 公理1のさおをつなげた2本のさお

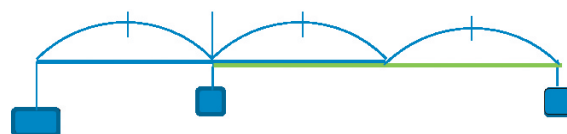


図9 さお1とさお2を合わせた2本のさお

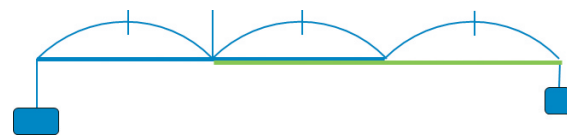


図10 さお2の左端のおもりをはずした2本のさお

定理2 支点からさおの両端までの距離が1:3のとき、さおの両端につけるおもりの重さはそれぞれ3:1になる。

〈定理2の証明〉

定理1で作った図11のさおを、さお3とする。このさお3を左右反転させたさお（これを、さお4とする。）を、図12のように、さお3の右端につす。このとき、さお4の全体の重さは $\frac{1}{2}a$ であればよい（図12）。すなわち、

$$x+y=\frac{1}{2}a \quad \cdots \textcircled{1}$$

さらに、さお4に定理1を適用すれば、

$$x:y=1:2$$

$$\text{よって、} y=2x \quad \cdots \textcircled{2}$$

式②を式①に代入して、

$$x+2x=\frac{1}{2}a$$

このことから

$$x=\frac{1}{6}a, \quad y=\frac{1}{3}a$$

となる。

定理1の証明と同様に、さお4をさお3に限りなく近づけると、図13になる。

このとき、さお3の支点到釣り下がるおもりの $\frac{1}{6}a$ は、公理3より、このおもりはないと考えてよい。

このことから、図14のように考えてよい。

（証明終わり）

定理2の証明後に、筆者らは、受講生に定理1と定理2を利用して同じ考え方を繰り返していくと、さおばかりの両端につける重さの比と、支点到両端までの距離の比について、定理3および図15に示した関係が成り立つと予想できるのではないかと、問いかけた。すると、受講生全員が、この考え方に納得した。

そこで、今回の定理3のように、すべての自然数 n に対して同じ考え方を繰り返していくと成り立ちそうな性質があるとき、数学では数学的帰納法という証明方法で証明していくことを伝えた。そして、数学的帰納法について、その考え方を数学Bの教科書を活用して説明した。受講生は、 $n=1$ や $n=2$ の場合についての証明が、定理1や定理2であることに気づいた。そして、任意の $n=k$ の時に成り立つとして、 $n=k+1$ の場合に成り立てば、 $n=1$ の場合が正しいことを利用して $n=2$ が正しいことがわかり、 $n=2$ が正しいことを利用して $n=3$ が正しいことがわかるという、数学的帰納法の仕組みを理解した。筆者らは、受講生がスムーズに理解していったことに驚いた。

定理3 さおの支点和両端までの長さの比が1:nのとき、それぞれの両端につけるおもりの重さの比はn:1になる。

〈定理3の証明〉

- (1) $n=1$ のとき、公理1より正しい。
- (2) $n=k$ のとき、定理3が成り立つと仮定する。このとき、 $n=k+1$ のときも定理3が成り立つことを証明すればよい。

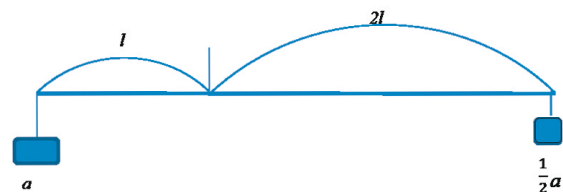


図11 定理1を一般化したさお

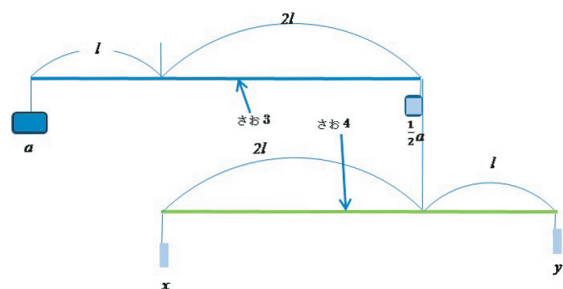


図12 図11のさおを左右対称につなげた2本のさお

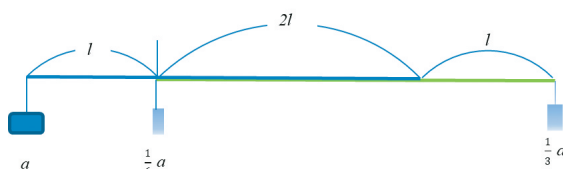


図13 さお1とさお2を合わせた2本のさお

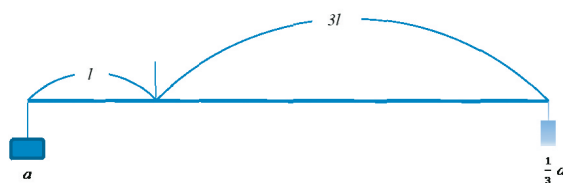


図14 定理2を一般化したさお

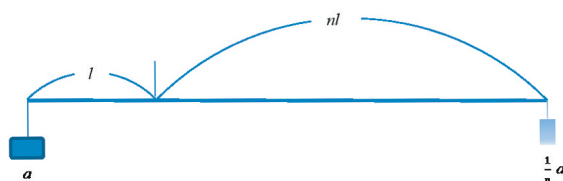


図15 n回同じことを繰り返した時に予想されるさお

そこで図16のように，長さ $k+1$ のさおに，それを左右反転したさおをつなげて考える。図16の上のさおがつり合うためには，上のさおの右端につけるおもりの重さは， $\frac{1}{k}a$ でなくてはならない。したがって，

$$x+y=\frac{1}{k}a \quad \cdots \textcircled{3}$$

$n=k$ の時は定理3が成り立つから， $x:y=1:k$ となる。

このことから

$$y=kx \quad \cdots \textcircled{4}$$

式④を式③に代入して，

$$x+kx=\frac{1}{k}a$$

このことから，

$$x=\frac{1}{k(k+1)}a, \quad y=\frac{1}{k+1}a$$

となる。

つぎに，図16の2つのさおを限りなく近づけると，支点の下のおもりの重さは考えなくてよいから，図17のようになる。

図17から， $n=k+1$ で定理3が成り立つことが証明できた。

(1)と(2)から，すべての自然数 n について，定理3が成り立つ。

(証明終わり)

続いて，定理4の内容を説明した。講座の時間内に証明までできないことが分かったので，考え方だけを説明した。しかしその内容は難しいことではなく，図15で，左側のおもりに対して同じことを繰り返せば，図18のようになることを伝えた。受講生は理解していて，証明に挑戦しようとする受講生もいた。筆者らは続けて定理4と図19を示した。受講生の中には，理科で学んだ知識であることに気づき，周りの仲間と確認しあう姿もあった。

定理4 さおの支点と両端までの長さの比が $m:n$ のとき，それぞれの両端につけるおもりの重さの比は $n:m$ になる。

ここまで述べてきたように，この講義では，公理をもとにして証明をし，公理や証明済みの定理をもとに，さらに定理を証明していく，証明の体験をしてもらった。受講生のうち，小学校5年生，6年生，中学校1年生は学校で証明を学んでいないし，中学校2年生もようやく証明に慣れ始める時期である。証明に慣れていない受講生や，まだ証明を学習していない受講生が非常に多いにもかかわらず，証明することに抵抗感をもつ受講生はあまり見受けられなかった。また，証明の内容について，積極的に質問する受講生が多かった。てこの原理の証明では，公理や定理1を使いながら，数学的帰納法を用いて一般的に証明するところまで講義できた。受講生は数学的帰納法の証明の仕組みも理解でき，筆者らは驚かされた。

3 ジュニアドクター発掘・養成講座の講義における受講生の反応

2回実施した数学領域の講義内容は，柱体で正三角形の棒をつくる立体模型づくり，さおばかりづくり，そしてさおばかりの原理の探究だった。3章では，それぞれの活動における受講生の反応を示す。

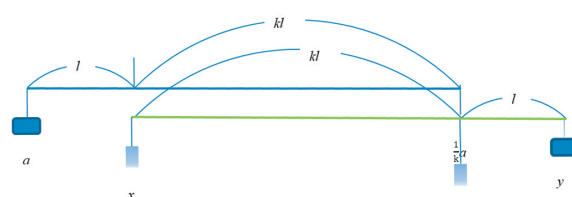


図16 図15のさおを左右対称につなげた2本のさお

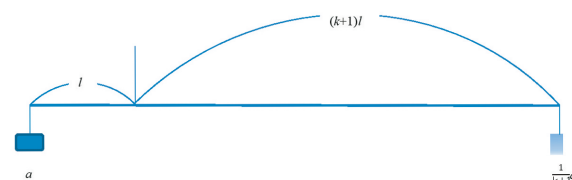


図17 $n=k+1$ のときのさおの様子

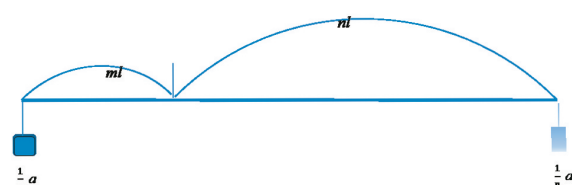


図18 一般的なさおのつり合い(1)

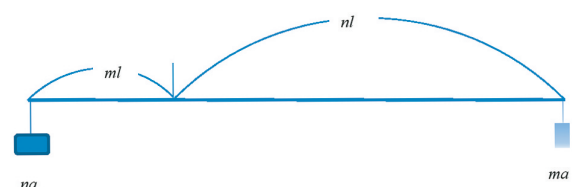


図19 一般的なさおのつり合い(2)

(1) 柱体で作る立体における反応

立体模型づくりでは、展開図を作図したり、展開図の線分の長さを計算で求める作業に苦勞する受講生が多かった。しかし、「立体とみると（では）考えにくいものも、平面（正射影の図形）で考えて計算すれば答えが出せた（括弧内は筆者）。」という受講生も多かった。さらに、「正五角柱以上でも（正三角形の立体が）つくれるのか試してみたい。（括弧内は筆者）」と考える受講生もいて、発展的な考えを思いつく様子もうかがえた。また、円柱の切り口が楕円になっていること、洋服の肩口も楕円になっていること、その型紙（展開図）は三角関数のグラフになっていることに、多くの受講生が驚きを持ち、あらためて立体を眺めながら実感し直していた。そして、「身のまわりにたくさんあったのでびっくりしました。」といった感想のように、身のまわりに沢山の数学が隠れていることにも感動していた。さらには、模型づくりを通して、図形の定義を改めて確認するだけでなく、より深い理解に到達する受講生もいた。

(2) さおばかりづくりにおける反応

さおばかりづくりでは、出来るだけ正確に作業しようとする受講生の活動が見られた。目盛りの間隔をはかるために、両面テープの1mm間隔の剥離紙をさおに貼って、目盛の間隔を確かめやすくする工夫をした班もあった。また考察の場面では「支点から（目盛り）1までの間隔以外の、目盛りの間隔は等間隔だった。（括弧内は筆者）」や「支点からの距離とコピー用紙の枚数でグラフをかいたら、一直線の一次関数のグラフになった。」、「さおばかりをつくる時、1枚ずつのときよりも10枚ずつのときの方が、支点が洗濯ばさみの方に近かった。」などの考察結果が見られた。また、作ったさおばかりの考察だけにとどまらず、「テープや紐の重さは結果に関係するのか、気にせずにつくっていいのか。」や「紙や重りの付け方を変えても結果は変わらないのか。」等の疑問を見出した受講生もいた。

(3) さおばかりの原理の考察における反応

てこの原理を一般的にとらえるために取り組んだ定理の証明では、理解するのに苦勞する受講生もいたが、重さがないさおについての、てこの原理の一般化まで理解できた受講生が多かったのには、筆者らは驚かされた。「帰納的な証明と聞くと、ややこしく感じるけど、実際は名前ほどややこしくなかった。」や「数学的帰納法やてこの原理の証明ができたり、そのやり方が知れて楽しかったです。」、「公理や定理など数学的なことがさおばかりにあるのは驚いた。先人はすごいと思う。」といった意見が非常に多かった。小学校高学年の発達段階や既習内容が十分とはいえない状態でも、強い興味関心をもつ学習者であれば、仕組みを理解して考えを進めていくことが可能であると、筆者らは実感した。

(4) 数学の講義全体を通しての反応

今回の講義では、実験したり議論したりする場面が多く設定されていたが、受講生からは「あまり話さない人とも協力してできたと思うので良かったです。」や「グループで協力して作業を進めていくのは楽しかった。」、「チームで工夫しながらつくれた。」といった意見が多く見られた。協働して活動する意義に気づいていることも、特筆すべき点だと考えている。さらには、「今の時代は道具がたくさんあって豊かに思えるけれど、生活の知恵は昔の人びとの方がより豊かだったんだなと思った。」のように、古代から受け継がれている文化に畏敬の念を感じている受講生が多かった。

4 受講生の自己評価からの考察

ジュニアドクター発掘・養成講座では、研究基礎コースの講義開始前と講義終了後に、アンケートによる自己評価を行った。そこでは、潜在的能力（集中力／忍耐力／知的好奇心／意欲の高さ、論理的思考力、科学的・技術的知識の程度）、専門的能力（科学的・技術的思考力、科学的・技術的表現力の程度）、創造的能力（科学的・技術的直感力の程度、独創性）について調査した。数学領域に限定してその変容を捉えてみると、専門的能力と創造的能力の伸長を実感している受講生が多くいることがわかった。ジュニアドクター発掘・養成講座の他の領域の学習前後でも同様の傾向が表出している。半年間の期間だったにもかかわらず、専門的能力と創造的能力の伸長を実感した受講生が増加していたことから、学校での学習歴が浅くても、高い興味関心をもつ学習者であれば、理屈を積み上げていくような、構成的な理解を高められたことが、受講生のアンケート結果からも見いだせた。

5 今後の展望

平成29年度のジュニアドクター発掘・養成講座に参加した受講生の中には、2年目の研究標準コースに進ん

で、さらに学習を深めている者もいる。また、すでに平成30年度のジュニアドクター発掘・養成講座も受講生を公募し、新たに研究基礎コースの講義が始まっている。筆者らは平成29年度の成果を参考にしながら、受講生の関心意欲をさらに喚起する講義の開発と、受講生による研究を支援するための方策を模索していこうと考えている。特に今年度からは、学校現場における支援も視野に入れて、受講生たちを学校で支援できる手だてを模索する一方策として、教員の養成にも取り組んでいくことが、大きな課題である。

謝 辞

本研究は JST の「ジュニアドクター養成塾」の助成を受けています。また、本研究の一部は JSPS 科研費15K00923の助成を受けています。なおジュニアドクター発掘・養成講座の活動は、徳島大学の勢井宏義先生、渡部稔先生、村田明広先生、四国大学の奥村秀樹先生、徳島県教育委員会の上岡祐司先生、徳島県立総合教育センターの平田義明先生、鳴門市教育委員会の藤本隆仁先生、鳴門教育大学の田村和之先生、曾根直人先生、武田清先生、米延仁志先生、米澤義彦先生、早藤幸隆先生など、多くの先生方の支援で成り立っております。この場をお借りして御礼申し上げます。

参考文献

- (1) 金児正史, 成川公昭, 宮口智成 (2018), 「科学・技術者の発掘・養成講座」における数学領域の学習内容の教材化～立体模型の展開図の考察や計算尺の原理の理解を素材として～, 鳴門教育大学研究紀要, 第33巻, pp. 252–264.
- (2) 林栄治, 斎藤憲 (2009), 「てんびんの魔術師 アルキメデスの数学」, 共立出版.
- (3) 岡村和夫ほか (2014), 数学 B, 実教出版.
- (4) 岡本和夫ほか (2015), 未来へひろがる数学 3, 啓林館.
- (5) 養老猛司ほか (2015), 未来をひらく小学理科 6, 教育出版.
- (6) 岡村定矩ほか (2016), 新編新しい科学, 東京書籍.
- (7) 國友正和ほか (2013), 物理, 数研出版.
- (8) 國友正和ほか (2013), 物理基礎, 数研出版.

The Contents of Instruction on Mathematics and the Reaction of the Learners in Junior Doctor Program

MIYAGUCHI Tomoshige*, KANEKO Masafumi** and NARUKAWA Kimiaki*

(Keywords : making nets of solid figures, steelyard, principle of leverage, mathematical induction, Junior Doctor Program)

In Naruto University of Education, “Junior Doctor Program” (JDP), which is supported by Japan Science and Technology Agency (JST), has given many scientific lessons since 2017. The number of students took this program amounts to forty ; they are all selected from schools in Tokushima Prefecture, and in Grades 5 to 7. In this paper, we describe the contents of the mathematics lessons held in the latter half of 2017, and present the students’ considerations and activities in these lessons. Using equilateral triangle prisms, square prisms and cylinders, the students made nets of solid figures, that are of equilateral triangular shape. After that, they made steelyards with bars, strings and weights. Through the activities of making the steelyards, the students found that “(the distance from the fulcrum to the point a weight is hung) times (the mass of the weight)” are the same for both the weights, if the steelyard is balanced ; in other words, they realized experimentally the principle of leverage. Then, in the subsequent lessons, we mathematically proved this finding. Throughout the lessons, the students participated these mathematics lessons tried continuously to find the properties of the solid figures and the steelyards by themselves. Moreover, they always discussed their findings with the others and tried to convey their ideas.

*Natural Science Education (Mathematics), Naruto University of Education

**Advanced Educational Practitioner, Naruto University of Education