

中学生を対象として等周問題を数学的に考察する学習の可能性と限界

～「科学・技術者の発掘・養成講座」受講生の学習活動からの分析～

金 見 正 史*, 成 川 公 昭**, 宮 口 智 成**, 平 野 康 之***

(キーワード：等周問題, 科学・技術者の発掘・養成講座)

1 はじめに

「等周な平面図形のうち、面積を最大にする図形は何か。」^① (以下、等周問題) は、数学の基本をなす、根本的で歴史的にも意味のある問題である。本研究は、中学生を対象とした等周問題を実践し、その学習の可能性と限界を捉えようとするものである。等周問題は、簡単な実験によって、等周の図形のうち、その面積を最大にする図形は円になるだろうということが、手にとるようにわかる (図1)。しかし、この事実を数学的に説明しようとするのは簡単なことではない。実際、等周問題は、数学の研究対象として、数多くの研究がなされている。これらの研究では、等周問題を考えるために極限の考えを必要とする。したがって筆者らは、等周問題が高等学校の生徒の話題として指導するのであれば、興味深い教材になるのではないかと考えていた。ところが大竹ら (2002) は、等周問題を中学校の課題学習として扱う可能性を提言している^①。筆者らはこの提言を受けて、中学生を対象として等周問題を考察する学習を具現化してみることにした。その大きな理由は、簡単な実験で確認できる事実を、数学的に考察することで、中学校数学科の目標である「数学的活動を通して、数量や図形などに関する基礎的な概念や原理・法則についての理解を深め、数学的な表現や処理の仕方を習得し、事象を数理的に考察し表現する能力を高めるとともに、数学的活動の楽しさや数学のよさを実感し、それらを活用して考えたり判断したりしようとする態度を育てる。」ことにつなげられると考えたからである^②。このような背景のもと、筆者らは、数学的な問題解決の過程を等周問題の講義に組み込んだ指導計画を立て、実施することにした。

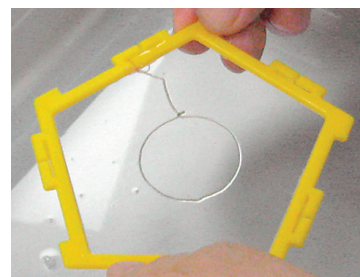


図1 実験による等周図形

しかしながら中学生を指導対象とした場合、極限の考えを直感的な理解の範囲にとどめたままで、どのような指導が可能なのか、その検討には時間を要した。そして筆者らは、「等周な n 角形のうち、面積を最大にする図形は正 n 角形である。」(以下、本研究の等周問題) を証明することを最終目標とし、 n を大きくすれば円になるであろう、と推測させる指導計画を考えた。また、この講義を実施するにあたって、数学に高い興味・関心を持つ中学生を対象とする必要性も感じた。そこで、平成25年度 JST の委託事業『次世代科学者養成プログラム (メニュー B)』として採択された『科学・技術者の発掘・養成講座』～徳島から育てよう未来の科学・技術者を～^③ (以下、「科学・技術者の発掘・養成講座」) に応募した受講生のうち、2年目に数学を希望した3名 (中学校各学年各1名) (以下、受講生) を対象に実施することにした^③。受講生は、いずれも数学に強い関心を持つが、既得知識に差があり、論理を組み立てていく経験はほぼ皆無である。そこで、等周問題の学習の前段階では、受講生の興味がある話題を所々で取り扱ったり、受講生が正しい事実と捉えている円周率は本当に3.14か、数学的に確かめる学習なども行い、平方根の定義や三平方の定理の限定的な証明などを織り込みながら、1年間の講義を行った。等周問題はこの講義の、後半部分に設定して実施した。

*鳴門教育大学 基礎・臨床系教育部

**鳴門教育大学 自然・生活系教育部

***広島工業大学 情報学部

2 本研究で取り扱う等周問題

等周問題は、国内で見ても Peter Frankl・前原潤 (1991)⁽⁴⁾や笹部貞一郎 (1976)⁽⁵⁾、小林昭七 (1999)⁽⁶⁾らが「等周な平面図形のうち、面積を最大にする図形は円である。」ことを証明している。しかしながら、この証明にあつては、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ の理解が必要である。また別の方法として、シュタイナーの方法があるが、これも極限の理解が必要となる。ところが大竹らは、中学校の課題学習として等周問題を扱う提言をしており、筆者らはこの論文に着目した。大竹らが扱う問題も「等周な平面図形のうち、面積を最大にする図形は円である。」である。大竹らがこの問題について、その論文で「証明はなかなか難しい。(中略)さらに検討を加えたところ、最大値の原理さえ認めてしまえば非常にわかりやすくなることに気づいた。」として、最大値の原理を直感的に認めさせながら、証明の方針を示していた。しかし、実際の中学校の授業においては、その扱い方については思案中であることも、併せて述べていた。こうした大竹らの提言を受けて、筆者らは、数学に強い関心・意欲を持つ受講生であれば、等周問題に取り組めるのではないかと考えて、その可能性を模索することにした。その結果、本研究で取り扱う等周問題を次のように設定することにした。

- (1) 「等周な平面図形のうち、面積を最大にする図形は円である。」までは証明しない。また「等周な三角形のうち、面積を最大にする図形はどんな図形か。」を予測し、なぜ面積を最大にする図形が正三角形なのかを証明することを導入の問題として位置づける。
- (2) 「等周な n 角形のうち、面積を最大にする図形は正 n 角形である。」を受講生の等周問題の最終目標に位置づけて講義を設計する。
- (3) 上記(2)を本研究の等周問題とし、中学校の課題学習の題材として位置づける。

配慮事項としては、上記(1)では多様な証明方法を示して受講生の理解を深め、疑問を持ったり予測したことを確かめる体験ができるようにすること、実験や操作活動を積極的に行うこと、等周問題の証明は筆者らが行って受講生には証明の理解に傾注するように促すこと、上記(2)を最終目標とする証明の流れを、受講生が常に意識できるように配慮して講義を進めることである。

3 等周問題の講義の実際

筆者らは、「科学・技術者の発掘・養成講座」の受講生3名を対象に、平成26年8月から平成27年2月までの期間に、等周問題について90分の講義を合計14回にわたって行った³⁾。なお、等周問題の学習に必要な知識のうち、受講生がそれまでの講義を通して獲得している知識は、平方根の定義にもとづく2次方程式の解法、三平方の定理である。また、講義の途中で必要な定理は、その都度証明しながら与えていくことにした。なお、等周の三角形で面積が最大になる三角形についての考察に多くの時間を割いた。本研究の等周問題のイメージを作ったり、これを証明するための準備を、最も簡単な多角形である三角形を利用することで、受講生の理解を深めようとしたからである。

(1) 実験による等周問題の理解

本研究の等周問題を証明することを最終目標とし、さらに、自然数 $n \geq 3$ が限りなく大きくなれば、面積を最大にする図形は円になるだろうと推測させる指導では、証明が中心になる。そこで、受講生が等周問題のイメージをつかめるようにするために演示実験を計画した(図1)。実験では、まずフレームに輪結びした糸を結びつける。次に、トレイに石けん水を注ぐ。この石けん水に、糸を結びつけたフレームを浸す。そしてこのフレームをトレイから取り出し、輪結びにした部分の石けん膜を破る。そうすると輪結びにした糸が円をえがく。この活動は、等周問題の最初に行う予定であったが、その準備が整わなかったため、(2)で示す等周の三角形で面積が最大な三角形の考察を行うための準備の途中で演示した。

(2) 等周の三角形の問題とその考察の準備

等周問題は「等周な平面図形のうち、面積を最大にする図形は何か。」であることを、受講生に伝えた。そしてこの問題を解くために、「等周の三角形のうちで面積が最も大きい三角形はどのような三角形か。」から考えることを伝えた。そしてこれから解決する最初の問題は「周りの長さが与えられた三角形のうち、面積を最大にする三角形を求めよ。」であることを受講生に伝えた。筆者らが、受講生にどのような三角形になるか予想してみるように促すと、受講生は正三角形ではないか、と予想した。筆者らは、その予想が正しいことを受講生に伝え

た。そして、この問題を数学的にとらえやすくするために、図を与えとともに（図2）、この問題の題意を以下のように数学的に表現し直した（問題1）。

そして、等周の三角形で面積を最大にする三角形は正三角形になることを証明すればよいことを確認した。また、本研究の等周問題として「周りの長さが与えられた四角形、五角形…と多角形の頂点の数を増やしていくとき、面積が最大になる多角形はどんな多角形か。」を考えていくことも伝えた。なお、等周問題は「与えられた長さのひもの両端を結んだループで囲まれた平面図形を考えると、その面積が最大になる図形はどんな図形か。」「表面積が一定の空間図形で体積が最大になる図形はどんな図形か。」といった問題に発展していくことも伝えた。

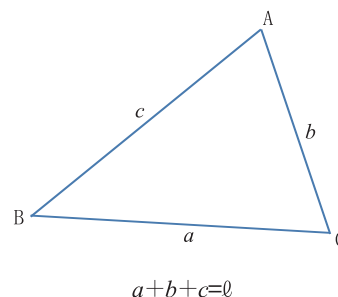


図2 等周の三角形

ところで、問題1では、三角形の3辺 a, b, c がすべて変数である。中学校の数学の学習では、2変数までしか学習しないのであるから、3変数ではなおさら考えにくい。こうした考えにくさを工夫するために、先人達は、3変数のうちの1変数を固定して考えようとしたことを伝えた。そして、この先の議論では、まず辺 a を固定して、2変数 b, c について、 $b+c=(一定)$ となる場合を考えていくことを伝えた。そして、命題1を証明すればよいことを伝えた。

「与えられた定数 $l (> 0)$ に対して、 $a+b+c=l$ を満たす三角形のうち、最大の面積を持つ三角形はどんな三角形か。」
…問題1

「 $AB+BC+CA=(一定)$ かつ $AB+CA=(一定)$ とする。このとき、 $\triangle ABC$ の面積が最大である $\Rightarrow b=c$ 」…(命題1)

(3) 等周の三角形で面積が最大な三角形についての作図と観察による考察

等周問題と並行して、2次曲線に興味を持った受講生は、楕円の性質も学習していた。それは、2点 B, C を固定し、

$$PB+PC=(一定)$$

をみたす点 P の集合は2点 B, C を焦点とした楕円になることである。受講生はひもを一定の長さに取り、その両端を黒板に固定して、実際に楕円をかいてみた。この作業を通して、受講者は、楕円をかくときに固定した2点から等距離にある点、すなわち点 P が、

$$PB=PC$$

を満たすときに、 BC を底辺とする三角形 PBC の高さが最も高いことを、観察した（図3）。



図3 楕円の作図

(4) 等周の三角形で面積が最大な三角形についての方程式を用いた考察

このことを、さらに補足するために、筆者らは、受講生に楕円の方程式

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

を与え、これを変形して、

$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)$$

とし、この式から、 x^2 が最小のとき y^2 は最大になる、すなわち、 $x=0$ のとき、

y^2 は最大になることを受講生に示した²⁴⁾。このことでわかる事実は、 $PB=PC$ のときに三角形 PBC の面積が最大になることである。つまり、(命題1)において、 $b=c$ になることである、と確認した（図4）。

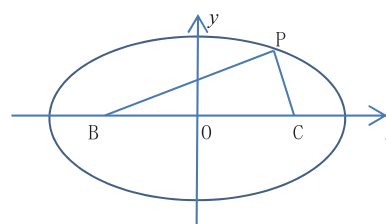


図4 楕円とその定義

(5) 等周の三角形で面積が最大な三角形についての新たな考察

しかし、方程式を用いた解答では、本研究の等周問題までたどり着かない。そこで別解として、以下に示す2つの主張の関連から「等周の三角形のうちで面積が最も大きい三角形が正三角形である。」ことを証明することにした。そのために、まず主張2を提示し、主張2から主張1が従うことを次のように説明した（図5）。

2つの主張において、2つの正三角形 A, U は相似で、正三角形 A の正三角形 U に対する相似比は $\frac{l}{l_0}$ である。また、三角形 E を三角形 I と相似になるようにとれば、三角形 I の三角形 E に対する相似比は $\frac{l}{L_0}$ である。

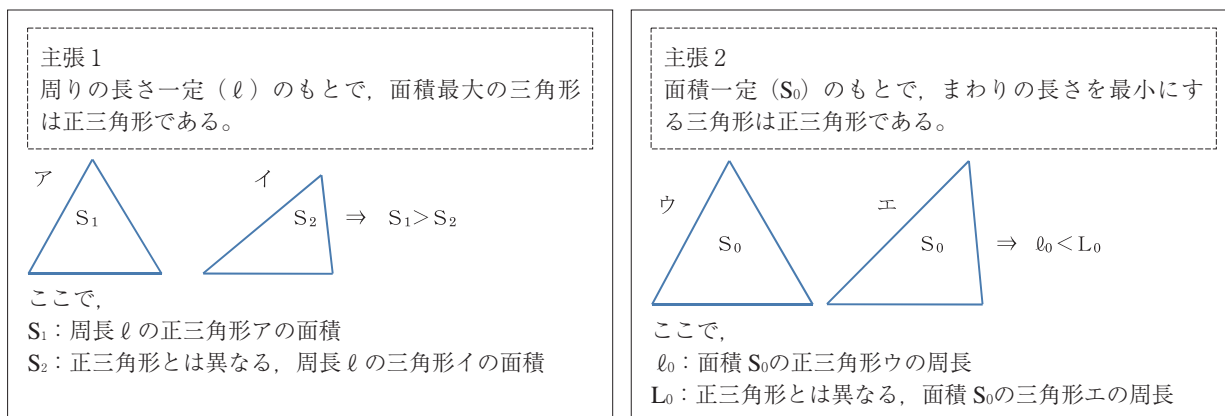


図5 主張1と主張2

仮定から $l_0 < L_0$ であるから、

$$\frac{l}{L_0} < \frac{l}{l_0} \text{ となる。}$$

したがって、正三角形ウを $\frac{l}{l_0}$ 倍に拡大した三角形、すなわち、周りの長さが l になる正三角形は、正三角形ウを $\frac{l}{L_0}$ 倍拡大した三角形より大きい。一方、互いに同じ面積を持つ三角形は同じ比率で拡大したときもまた互いに同じ面積を持つことに注意すれば、正三角形ウを $\frac{l}{L_0}$ 倍拡大した三角形の面積は S_2 に等しい。以上の2つのことから、 $S_1 > S_2$ である。つまり、主張2が証明できれば、主張1が正しいことが認められることを導いた。

次に主張2の証明をした。主張2の証明は、 $\triangle ABC$ が条件を満たす三角形としたとき、 $AB = AC$ であることを示すことから始めた(図6)。頂点 B, C を固定したとき、面積 S_0 をもつ三角形 PBC の点 P は、常に底辺 BC に平行な直線 m (距離 $= 2S_0/|BC|$) 上にあり、しかも、その時に限る。したがって、この直線 m 上の点 P のうち、 $PB + PC$ が最小になるときが、条件を満たす三角形 ABC の頂点 A の位置である。最小値をとるときの点 P の位置は、点 C の直線 m に対する対称点 C' をとり、線分 BC' と直線 m の交点により得られる。すなわち、 $AB = AC$ が導かれた。同様にして、 AC を底辺として考えれば、 $BA = BC$ である。以上から、

$$AB = BC = CA$$

を導いた。なおこの考えは、作図の問題として中学校の教科書でも扱っている問題である。

以上の主張2の証明を通して、主張1「面積一定でまわりの長さを最小にする三角形は正三角形である。」ことが証明された。

(6) 等周の三角形で面積が最大な三角形についてのヘロンの公式を用いた考察

次に、三角形の3辺について、 $a + b + c = l$ の条件のもとで、その三角形の面積 S を、3辺 a, b, c を用いて表せる公式があることを伝えた(以下、ヘロンの公式)。筆者らは、ヘロンの公式と相加・相乗平均を用いて、三角形の面積 S を最大にするときの3辺 a, b, c の考察ができることを伝えた。その上で、ヘロンの公式の証明を行った。この証明では、三平方の定理の他に、 $(A+B)^2$ と $(A+B)(A-B)$ の展開公式を必要とする。受講生は、三平方の定理はすでに活用できるが、展開公式は未習のため、道具として使うこととして展開公式を与えた。また、ヘロンの公式の証明は、受講生の理解を深めやすくするために、鋭角三角形に限定した。そして、三角形 ABC の各辺の長さを $a, b, c (> 0)$ とするとき、この三角形の面積 S を求めることにした。そのためには、図7のように、頂点 A から対辺 BC に垂線 AH をおろし、辺 BC との交点

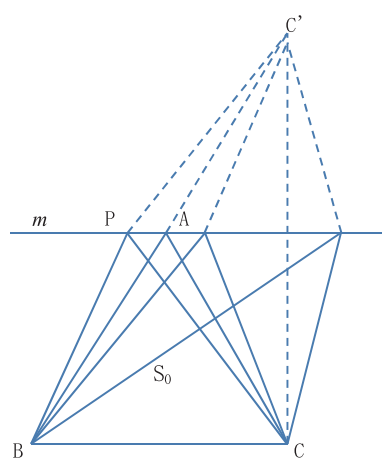


図6 主張2の証明

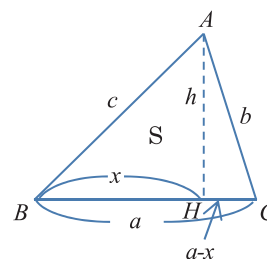


図7 ヘロンの公式

を H とし, $AH=h$ とおき, h を求めたいことを確認した。 h を求めるために, さらに $BH=x$ とすると, $CH=a-x$ となる。ここで, 三角形 ABH と三角形 ACH に三平方の定理をあてはめて,

$$x^2+h^2=c^2 \quad \dots(1)$$

$$(a-x)^2+h^2=b^2 \quad \dots(2)$$

式(2)を展開して, 両辺の辺々をひくことで, x^2 の項が消去されて, x の長さを, a, b, c を用いて

$$x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a} \text{ と導いた。}$$

これを式(1)に代入し,

$$h^2 = c^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a} \right)^2 = \dots = \frac{1}{4a^2} (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$

を導いた。これをさらに $S = \frac{1}{2}ah$ から導いた $S^2 = \frac{1}{4}a^2h^2$ に代入して,

$$S^2 = \frac{1}{16} (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$

ここで $s = \frac{a+b+c}{2}$ として, さらに S^2 の正の平方根をとることで,

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \dots(3)$$

を導いた。受講生にとっては, かなりの計算力を問われる過程であったが, これらの式変形も筆者らが行い, その整合性を受講生に逐一確認していくように促した^{註5}。

次に, 相加・相乗平均について説明した。ヘロンの公式を用いた証明にあたっては, 3つの正の数についての相加・相乗平均の知識が必要になる。そこで, これは受講生に次のことがらを知識として与えた。それは,

3つの正の数 $x, y, z \geq 0$ に対し,

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz} \quad (\text{ただし等号成立は } x=y=z \text{ に限る}) \text{ 註6} \quad \dots(4)$$

である。

しかし, 式(3)から, 三角形の面積 $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ が最大になるとき, $\sqrt[3]{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ も最大になることを受講生に理解させることは難しく, 指数法則の理解の限界があることが明らかになった。そのため, ヘロンの公式を用いた考察は, この段階で中断した。ところで, 筆者らが考えていた, これに続く指導内容は次の通りである。まず, $s-a, s-b, s-c > 0$ であることに注意して相加・相乗平均を利用して,

$$\sqrt[3]{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{(s-a) + (s-b) + (s-c)}{3} = \frac{s}{3}$$

となり, 等号成立は $s-a=s-b=s-c$, すなわち $a=b=c$ のときに限り, このとき面積 S は最大となることを導く予定だった。

(7) 等周の n 角形の中で面積が最大な図形は正 n 角形であることの証明

等周の三角形で面積が最大な三角形は正三角形であることを証明した。次にこの定理を一般の n 角形へ拡張することを伝え, スタイナーによる証明を参考文献(1)に基づき解説した。受講生の理解を確かめながら進めたため, 一部変更を加えざるを得なかったが, 基本的には参考文献(1)に述べられている通りである。行った解説と手順を明確にするため, 以下においてそれを再掲する。

定理 周の長さが一定の n 角形の中で面積最大なのは正 n 角形である。($n \geq 3$)

特に $n=3$ のとき, 正三角形が面積最大である。

補題1 周の長さが一定の n 角形の中で, 面積最大なのは, 辺の長さが全て等しい等辺 n 角形である。

[補題1の証明]

面積最大の n 角形が等辺でないとする。このとき, 長さの異なる隣り合う辺がある。その n 角形を $A_1A_2 \dots A_n$ とする (図8)。

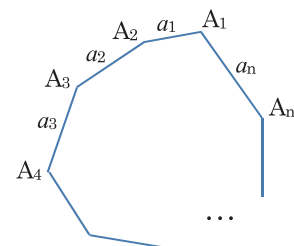


図8 補題1の n 角形

$A_1A_2=a_1, A_2A_3=a_2, \dots, A_nA_1=a_n$, とし, $a_1 \neq a_2$ とする。このとき, n 角形 $A_1A_2 \cdots A_n$ は凸多角形であると仮定して考える。

$A_1B + A_3B = a_1 + a_2$, かつ $A_1B = A_3B$ となる二等辺三角形 A_1BA_3 を考える (図9)。このとき, 命題1から「与えられた2点を底辺とし, 他の2辺の和が一定の三角形の面積 (あるいは高さ) が最大になるのは二等辺三角形のときである。」ことから,

$$\triangle A_1BA_3 \text{の面積} > \triangle A_1A_2A_3 \text{の面積}$$

となる。

このことを利用して,

$$\begin{aligned} & n \text{ 角形 } A_1BA_3 \cdots A_n \text{ の面積} \\ &= \triangle A_1BA_3 \text{の面積} + (n-1) \text{ 角形 } A_1A_3 \cdots A_n \text{ の面積} \\ &> \triangle A_1A_2A_3 \text{の面積} + (n-1) \text{ 角形 } A_1A_3 \cdots A_n \text{ の面積} \\ &= n \text{ 角形 } A_1A_2A_3 \cdots A_n \text{ の面積} \end{aligned}$$

これは, n 角形 $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ の面積が, 面積最大であると仮定したことと矛盾する。

よって, $a_1 = a_2$

したがって, n 角形の面積が最大ならば, 等辺である。

(証明終わり)

次に補題2を証明した。しかし一般の $(n+1)$ 角形について証明するのは, 受講生には難しい (図10)。そこで, 六角形に限定して証明し, 類推して一般化することにした。

補題2 a_1, a_2, \dots, a_n の辺の長さが与えられたとき, $(n+1)$ 角形のうち n 個の辺が順番に a_1, a_2, \dots, a_n である $(n+1)$ 角形の面積を最大にするものは, 残りの辺を直径とする円に内接する ($(n+1)$ 個の頂点が全て円周上にある)。

[証明]

六角形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ が面積最大であると仮定する。また, この六角形の頂点が, 辺 A_1A_6 を直径とする円周上についていないと仮定する (図11)。

たとえば頂点 A_3 が, 辺 A_1A_6 を直径とする円周上にないとする。図11で, 辺 A_1A_6 の長さとして $\angle A_1A_3A_6$ を変化させるとすると, $\triangle A_1A_3A_6$ の面積が最大になるとき, 六角形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ の面積が最大になる。

すなわち, $\angle A_1A_3A_6$ が 90° のとき, $\triangle A_1A_3A_6$ の面積が最大となり, 六角形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ の面積が最大である。したがって, $\angle A_1A_3A_6 = 90^\circ$ であり, A_3 が, 辺 A_1A_6 を直径とする円周上についている^{註7}。

これは, 頂点 A_3 が, 辺 A_1A_6 を直径とする円周上にないという仮定に矛盾する。このことから, 5つの辺が順番に a_1, a_2, \dots, a_5 である六角形の面積を最大にするものは, 残りの辺 A_1A_6 を直径とする円に内接する。

このことは, 一般の $(n+1)$ 角形についても同様に証明できる。

(証明終わり)

さらに次の補題3を証明した。補題3の証明にあたっては, 議論を簡単にするために, $n=5$ の場合について証明した。

補題3 各辺の長さが与えられた n 角形のうち, 最大の面積を持つものは円に内接する。

[証明]

円に内接しない五角形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ の各辺の長さを a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 と

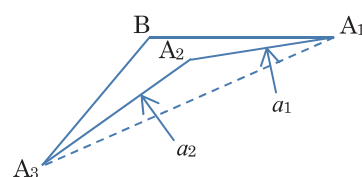


図9 $\triangle A_1BA_3$ の面積

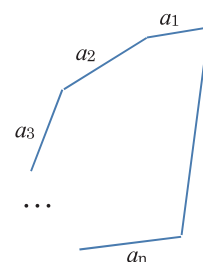


図10 補題2の $n+1$ 角形

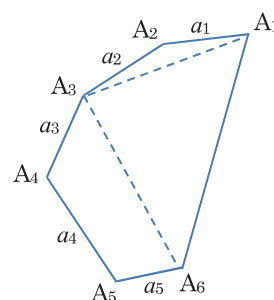


図11 補題2の六角形

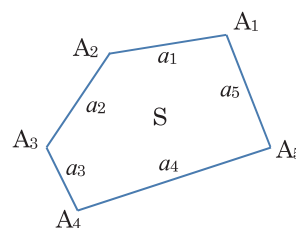


図12 補題3の五角形

する(図12)。与えられた五角形の辺の長さ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 をかえずに、円に内接する五角形 $A_1'A_2'A_3'A_4'A_5'$ を考える。このとき、先に、円に内接する五角形 $A_1'A_2'A_3'A_4'A_5'$ を考えてよい。そして、五角形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ の面積 $S <$ 五角形 $A_1'A_2'A_3'A_4'A_5'$ の面積 S' を導く。

このとき、図13の五角形 $A_1'A_2'A_3'A_4'A_5'$ において、点 A_1' と円の中心を通る直径 $A_1'B$ をひく(図14)。さらに、 $\triangle A_4'BA_5'$ を考え、 a_4 の長さは等しいので、 $\triangle A_4BA_5 \equiv \triangle A_4'B'A_5'$ となる $\triangle A_4BA_5$ を考え、点 A_1 と B を結ぶ。

そして、 $S < S'$ を示すために、

$$S + \triangle A_4BA_5 < S' + \triangle A_4'B'A_5'$$

を示す。

ここで、補題2より、

$$\text{五角形 } A_1A_2A_3A_4A_5 \leq \text{五角形 } A_1'A_2'A_3'A_4'B' \quad \dots(5)$$

$$\triangle A_1A_5B \leq \triangle A_1'A_5'B' \quad \dots(6)$$

ここで、五角形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ は円に内接していないならば、五角形 $A_1A_2A_3A_4B$ が A_1B を直径とする円に内接していない、または、 $\triangle A_1A_5B$ が A_1B を直径とする円に内接していない。

式(5)と式(6)より、

$$S + \triangle A_4BA_5 < S' + \triangle A_4'B'A_5'$$

$$\therefore S < S'$$

なお、上記の証明は $n=5$ の時に限定したが、同様にして、一般の自然数 $n \geq 3$ に対して成り立つ。

(証明終わり)

補題1および補題3から、「周の長さが一定の n 角形の中で面積が最大のものは正 n 角形である。」ことの解説を行うことができた。

4 等周問題の講義における生徒の反応

4章では、3章で示した等周問題の講義における生徒の活動及び反応を示す。

(1) 実験による等周問題の理解

石けん水を用いた実験は、受講生にとっては大変興味深いものだったようである(図15)。この実験では、フレームに余り多くの石けん水がついていても、うまくできないのであるが、何度も実験をして、その過程を観察する受講生は、文言で書かれている等周問題「等周な平面図形のうち、面積を最大にする図形は何か」の意味を、実感して捉えていた。数学教育において、実験や操作活動が重要であることを、改めて感じた場面であった。

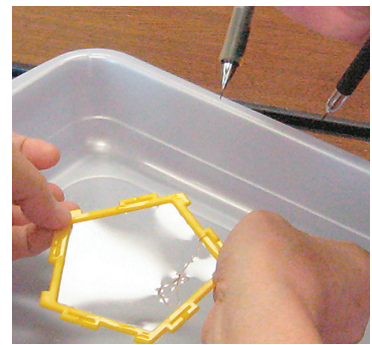


図15 輪の部分の石けん水を取り除く

(2) 等周の三角形の問題とその考察の準備

多くの変数がある場合、変数を1つ固定して、変数の個数を減らして考察する手法が、数学ではよく利用される。しかしながら、この考え方を初めて学ぶのは、高等学校の学習である。この学習では、受講生には難しいのではないかと考えながら様子を見ていたが、受講生はこの手法のアイデアに納得するとともに、数学的に考えを推し進めやすくなる工夫であることに気づいていた。そして、(命題1)を証明すればよいことも、抵抗なく理解していた。筆者らは、もう少し説明が必要ではないかと、予想していたのだが、受講生は変数を固定して考える手法のよさに感嘆していた。

(3) 等周の三角形で面積が最大な三角形についての作図と観察による考察

3辺のうち1辺を固定したときに、2辺について

$$PB + PC = (\text{一定})$$

となることについて、受講生に黒板で実験をするように促した。利用したものはひもとチョークだけである(図3)。作業を通して、受講生はきれいに楕円がかかることに感動した様子だった。また、(命題1)が指し示す事

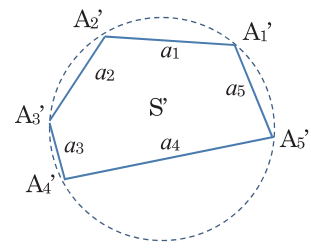


図13 内接五角形

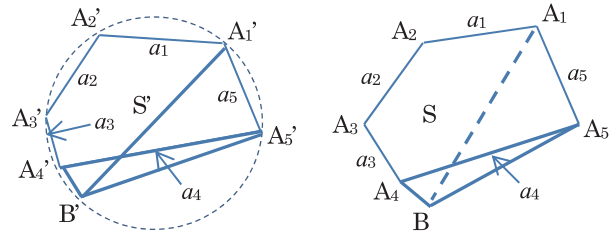


図14 補題3を証明するために準備した図形

実は、焦点を結ぶ線分の垂直二等分線と楕円の交点になるだろうと、受講生は観察からとらえていた。受講生は、観察だけでは(命題1)を証明したことになるかと理解していたが、証明すべき内容を作業を通して実感したことは、その先の講義への動機付けにもなっていた、と捉えている。

(4) 等周の三角形で面積が最大な三角形についての方程式を用いた考察

(3)の学習で、受講生は(命題1)が真であることを、直感的に理解したが、それを補足する方法として、方程式を活用してその事実を示す学習だった。受講生は、等周問題に取り組むまでに、すでに平方根の定義を活用して2次方程式の解を求める方法を、習得していた。筆者らは、この計算がかなりやっかいなものではないかと心配したが、受講生は、2次方程式を用いて $AB=AC$ が導けることに感激するとともに、よく理解していた(図4)。この学習を通して、受講生は、方程式に頼ると簡潔に解決できることを知り、また、図形の方程式が数学の有用な道具になることを認識していた。

(5) 等周の三角形で面積が最大な三角形についての新たな考察

(3)と(4)の方法は、等周の三角形の問題においては有効でわかりやすい解決方法であったが、これらの方法は、等周の多角形までの議論に耐えられない。(5)で学習した内容は、最初のうちは、受講生にとって議論の必然性を感じなかった様子が窺えた。それでも、講義内容は理解していた。特に、主張2の証明は、中学校の学習内容である。この学習が、「等周の三角形で面積が最大な三角形が正三角形になる。」ことを支える事実であることに、受講生は驚いていた。なお、この証明方法の一部には、背理法という間接証明法を含んでおり、受講生が簡単に理解していたわけではない。背理法の学習は、高等学校の学習範囲であるが、丁寧に解説することにより、受講生がこれらの推論を理解していた。一連の受講生の学習の様子には、筆者らも驚かされた。

(6) 等周の三角形で面積が最大な三角形についてのヘロンの公式を用いた考察

ヘロンの公式と相加・相乗平均を利用した証明は、受講生の理解を超える部分があることがわかったために、途中で中断した。それでも、ヘロンの公式の証明はよく理解していた。この証明で利用する数学の知識は、三平方の定理と多項式の展開公式であるが、その計算はかなり煩雑である。ヘロンの公式の証明には多くの計算過程が必要であるにもかかわらず、受講生はよく理解していた。また、相加・相乗平均は、証明せずに利用しようとしたのであるが、実数の範囲の指数法則の理解は、受講生にはさすがに難しく、他に適切な説明方法がなかった。そして筆者らはこの方法による証明を中断した。それでも、受講生は等周の三角形について、別の証明方法があることを知り、できれば理解したいという思いを持っていた様子が窺えた。

(7) 等周のn角形の中で面積が最大な図形は正n角形であることの証明

三角形の等周問題から本研究の等周問題へと拡張する学習の準備には、補題が3つ必要であり、証明は非常に長いものである。そこで議論を簡単にするために、証明では六角形や五角形に限定して証明するなどの工夫をした。受講生はわからない場面があると、証明途中でも質問し、理解しようと努力している様子が多く見られた。証明の過程では、新たに学んだ背理法を用いる部分もあったが、等周問題で、これまでに証明した定理を利用しながら証明を推し進めていく過程には、納得する様子も見られた。

この学習は、等周のn角形に関する等周問題であったが、自然数 $n \geq 3$ で、nを限りなく大きくすれば、限りなく多くの頂点を持つような、円に内接する正多角形ができること、ひいてはそれが円になるだろうと、受講生は納得していた。

(8) 講義における受講生の感想

等周問題に取り組んでいる最中に、受講生にアンケート調査を実施した。受講生の感想には楽しかったこととして、次のようなコメントがあった。

- ①中学校では習わない定理や証明などの新しい知識・考えが発見できたことが楽しかったです。
- ②楕円をかく作業が楽しかったです。
- ③ピタゴラスの定理など、広く使える公式について考えたことが楽しかった。
- ④定理を証明したことが楽しかった。

また、全般的な感想としては次のようなコメントがあった。

- ⑤わからなくて、行き詰まったという感じがなくて、ずっと理解することができました。
- ⑥今後は作業をして実際にそうなるか検証したり、考えを深めるために討論したりする機会も増えたらいいと思います。
- ⑦これまで自分で取り組んでいた算数・数学の内容よりも遙かに難しいテーマについて考えましたが、それらの中には自分の知識の範囲で解けるものも多くあったので、1つの公式や定理をなるべく多様な使い方ができる

ようにすることが大切だと思いました。

⑧数学はおもしろいと思いました。いろいろ知った公式やピタゴラス数などについてももっと本で深めていきたいと思います。

受講生は、難しいことを厭わず、わかりたいという思いで講義に取り組んでいたことがわかるコメントが多い。また、数学を論理的に組み立てていく証明の過程についても、興味を持っている様子が窺える。

5 等周問題を数学的に考察する学習の可能性と限界

本研究では「等周な平面図形のうち、面積を最大にする図形は何か。」という等周問題を、中学校の課題学習の題材として取り上げる難しさを解決しようとして「等周な n 角形のうち、面積を最大にする図形は正 n 角形である。」を本研究の等周問題と位置づけた。そしてこれを最終目標として、中学生を対象とした授業を実践した。本研究の等周問題の導入では「等周な三角形のうち、面積を最大にする図形はどんな図形か。」を予測し、多様な方法で証明することを試みた。本研究の等周問題を最終目標として授業を進めてみた結果、この学習を中学校の課題学習の題材として扱う際の可能性と限界を明らかにすることができた。

本研究の等周問題を指導して明らかになった指導の可能性は4点ある。1つめは、中学生を対象としても、極限の考えを認めて指導する可能性が見えたことである。最初に述べたように「等周な平面図形のうち、面積を最大にする図形は円である。」ことを証明するためには、極限の考えや最大値の定理を必要とする。極限の考えを、どの学習場面でどのように活用すれば、中学生でも、それほど無理なく円になることを認められるのか、本研究の大きな課題であった。本研究が行った方法は「等周な n 角形のうち、面積を最大にする図形は正 n 角形である。」ことを利用して、自然数 $n \geq 3$ を限りなく大きくしたときに円になるだろうと予測させることだった。この方法は、受講者の反応から、中学生でもそれほど無理がなかったことがわかった。実際、中学校3年の教科書では、たとえば2次関数のグラフをかくとき、可能な範囲で細かく点を取り、さらに点を多く取っていくとなめらかな曲線になることを解説している。この程度の極限の考えは、中学生でも可能なのではないかと、筆者らは考えている。

2つめは楕円の作図をしたり石けん水の実験をしたりして、直感的に理解を促すことによって、思考を支援することがわかった点である。本研究が実践した授業の先に「等周な平面図形のうち、面積を最大にする図形が円である。」のような等周問題があり、石けん水を利用した実験を通して見通しを持てるような機会を設けた。受講生の意識や学習の様子から推し量るだけではあるが、実験や操作活動が学習者の関心と興味を持続させ、思考を支援している様子が見て取れた。学校教育では、実験や操作活動の重要性は、日常茶飯事のように言われていることではあるものの、かなり高度な学習にあっても、実験や操作活動の重要性が明らかにできたことは意義深いと、筆者らは考えている。

3つめは、算数・数学に強い関心・意欲を持つ学習者であれば、既習の学習内容が十分でなくても、丁寧に数学を構成していく講義を提供することができれば、学習者は大きく成長する可能性を秘めていることがわかったことである。当初、筆者らは、中学生がはたしてどこまで等周問題を追及できるか懐疑的な面もあったのだが、受講生はやり遂げた。本研究の等周問題にあたって立案した指導計画が、講義に参加した受講生の関心・意欲に適していたことも大きな要因であろうが、学校教育において高い関心・意欲を持つ学習者への対応を考える1つの視点が与えられたと考えている。

4つめは、数学と数学教育の専門家が共働して、教材開発に携わることの可能性とよさである。本研究の等周問題でも、数学の多様な知識がなければ、学習者にあわせて調整しながら講義を進めることは難しかった。このように、難解で丁寧な指導を必要とする教材でも、指導者が共働して状況に合わせた対応をとることで、調整が可能な教材開発及び授業実践が実施できることを再確認できた。

一方で、本研究の等周問題を指導して明らかになった指導の限界は3点ある。1つめは、中学生に極限の考えを数学的に指導する難しさである。極限の考えを認めるような、学習機会や生活経験の少なさも影響しているだろうが、限りなく続けるとか限りなく大きくするときに起きる現象を推測させることまでで精一杯ではないか、と考えている。

2つめは、本研究の等周問題では、学習者の関心・意欲や知的好奇心の強さに依存せざるを得ないことが明らかになったことである。本研究における講義の対象者は、算数・数学に強い関心・意欲を持つ受講生しかいなかったし、人数も3名だけだった。本研究の等周問題において、限りなく自然数を大きくしていく感覚も、大変な

労力と努力を必要とした証明も、彼らの高い関心・意欲や知的好奇心があって成し遂げられたものだった。

3つめは「等周な平面図形のうち、面積を最大にする図形は円である。」まで想像させるとき、本研究の最終目標である「等周な n 角形のうち、面積を最大にする図形は正 n 角形である。」だけでなく、「等周であれば、正 n 角形よりも正 $(n+1)$ 多角形の方が、面積が大きい。」ことの証明まで必要である。このように、本研究で試みた等周問題の指導は、数学の等周問題の取り扱いとしては、不備がある。しかし、中学校段階での指導を検討するにあたっては、限界があることを承知している必要があると考えている。

6 成果と課題

本研究の等周問題を受講生に講義する中で、筆者らが実感したことが3つある。1つめは、算数・数学に高い関心・意欲を持つ中学生がいることを、改めて認識したことである。受講生には、必要な教材として高等学校の教科書を手渡したが、暇を見つけては愛読書のようにむさぼり読む姿をよく見かけた。模型を作る課題を出しても、必ずと言ってよいほど作成して講義に持参して来ていた。学校の学習にとどまらず、意欲的に学習しようとする学習者に、どのような指導や支援ができるのか、筆者らは常に考えさせられた。学校教育の中でも、このように、非常に関心の高い学習者に対応した教育の重要性を強く感じた。この点については、今後の課題として吟味していく必要がある。

2つめは、学習者をよく観察する必要性を改めて感じたことである。大変難しい学習内容であったし、受講生が3名しかいなかったこともあるが、筆者らは常に学習者を観察し続け、必要に応じて補助的な指導を続けた。学校教育の中でも、各学習者のポートフォリオなどを作成して、よりきめ細かい指導のための対応が必要であることを見出す機会となった。

3つめは、講義が進むにつれて、受講生は自分の考えや疑問を積極的に発表するようになったことである。本研究の講義を続けてきた環境に、受講生がなじんだことも大きな要因と思われるが、学習者が、自らの考えや疑問を、いつでも発表できるように、環境を整えることの重要性も見えてきた。学校教育でも、指導計画を作成する際に、こうした場と時間の確保を少し取り入れ、学習者が自分の考えをまとめたり、疑問を確認しやすくなる状況を作り出すことの重要性も見えてきた。

これらの成果と課題は、学校教育に直接的に反映できるものを含んでいる。これらの成果と課題を学校教育でどのように具現化し、改善が図れるのか、今後検討していく。

—註—

- 1 等周問題では空間図形を含んでいる。本研究では平面図形に限定し、「等周な平面図形のうち、面積を最大にする図形は何か」としている。
- 2 スタンダードコース、プレマスターコース、マスターコースのステップアップコースを設定した。JSTの採択によって実践した詳細な報告は、以下のホームページに掲載されている。
<http://www.jst.go.jp/cpse/fsp/about/report.html> (2015年5月現在)
- 3 14回の講義すべてを等周問題に活用したのではなく、受講生が興味を持った数学の話題の解説や証明も含む。それらの時間を除くと、およそ90分の講義12回分に相当する。
- 4 受講生は等周問題を学習する以前に、円の面積を区分求積法で求め、はさみうちの原理を用いて、半径1の円の面積が3.14で近似できることを学習した。その際に必要な知識として、2次方程式を解く考え方とその方法を学習している。その他に、三平方の定理については、3辺が3, 4, 5の直角三角形に限定して証明している。
- 5 ヘロンの公式は数学Iの教科書に掲載されている。例えば数研出版(2014)の「数学I」p.155を参照されたい。
- 6 $A \geq 0$ に対し、 $x^3 = A$ となる x を $\sqrt[3]{A}$ とかくことを伝えた。なお、相加・相乗平均は数学IIの教科書に掲載されている。例えば数研出版(2014)の「数学II」p.33を参照されたい。
- 7 この事実については、円周角の定理の逆を知っている必要がある。この事実は証明せずに受講者に知識として教えた。

—文献—

- (1) 大竹公一郎, 武井修, 土屋修, 過外正律, 木村聡, 松井宏義, 栗原秀文「等周問題について—中学校における課題学習のテーマとして—」『群馬大学教育学部紀要自然科学編』50, pp. 49–54, 2002
- (2) 文部科学省『中学校学習指導要領解説数学編』教育出版, p. 14, 2008
- (3) 金兎正史, 成川公昭, 平野康之「科学・技術者の卵を育成する「科学・時術者の発掘・養成講座」の展開—数学領域におけるプレマスターコースの学習内容—」『鳴門教育大学研究紀要』30, pp. 90–100, 2015
- (4) Peter Frankel, 前原潤『幾何学の散歩道離散—組み合わせ幾何入門—』共立出版, pp. 116–121, 1991
- (5) 笹部貞一郎『問題解法幾何学事典第2版』聖文社, pp. 216–218, 1976
- (6) 小林昭七『円の数学』裳華房, pp. 91–112, 1999

The Availability and Limitation on Learning an Isoperimetric Problem for Lower Secondary School Students

KANEKO Masafumi^{*}, NARUKAWA Kimiaki^{**}, MIYAGUCHI Tomoshige^{**}
and HIRANO Yasuyuki^{***}

(Keywords : Isoperimetric Problem)

We have taken a class on an isoperimetric problem for lower secondary school students who have high motivation to mathematics. In this paper, we have considered the lesson plan on an isoperimetric problem for the students and decided the goal of this class is to prove the theorem as below.

‘A polygon which has the biggest area with same constant perimeter is a regular polygon.’

After the class on an isoperimetric problem, we have realized the goal of isoperimetric problem for lower secondary school students will be suitable and have recognized strongly the mathematical experiments will be an important impact for this class.

^{*}Advanced Educational Practitioner, Naruto University of Education

^{**}Natural Science Education (Mathematics), Naruto University of Education

^{***}Faculty of Applied Information Science, Hiroshima Institute of Technology