鳴門教育大学授業実践研究
－授業改善をめざして－
第18号　2019

高等学校数学における関数指導の事例研究

西條　武志*，金児　正史**

（キーワード：関数指導，体系的な理解，理解不足の自覚，学習意欲の向上）

1.　問題の所在

第１筆者のこれまでの勤務校は夜間定時制高校や選抜性の高い全日制普通科高校である。どの勤務校の生徒であっても，数学に対して「答えがあえばそれでよい」と考えている生徒や，「なぜそうなるのかを考えない」「基本的な用語や記号を正確に使えない」といった生徒が多い。その結果，機械的な計算に終始し，論理的な記述や用語を正しく用いて答案がかけないなど表面的な浅い理解に留まっているといった生徒の様子がうかがえる。例えば，数学Ａ「順列と組合せ」において，学習の初期段階ではない生徒から「この問題ではＰを使うのですか, それともＣですか？」（P，Ｃはそれぞれ順列 $_nP_r$，組合せ $_nC_r$ のこと）といった質問を受ける。「この問題ではP，ここではＣ」というように，一つの問題に対して画一的，機械的にあてはめようとする。「なぜその計算で求められるか」には理解が及んでいない生徒の典型的な質問の例である。また「用語等の定義の理解がおろそか」であることなどから「適切に表現できない，記述できない」生徒が多くいるという実態もある。高校生は，義務教育段階の，教えられ与えられることの多い学習から，より主体的に考察し深い理解が求められ，さらに量的・質的にも多様化する高等学校での学習の変化に対応しなければならない。しかしそれに対応できない生徒が近年増加しているように感じる。

第１筆者はこれまで数学科の教員として，数学の授業を通して，数学の面白さやよさを伝え，その有用性やすばらしさを実感させられるような教育活動に取り組みたいと考えてきた。また高等学校卒業後は数学に限らずその他の教科・領域等，学校生活の中で学んだことを糧にし，謙虚に，そして自信をもち，社会で活躍できる人になってほしいとの願いをもち，生徒たちと関わってきた。このことは我が国の教育に対する期待や改革の方針と大きく違わない。例えば高大接続システム改革会議(2016)は，「高等学校については，中学校卒業後のほぼ全ての者が，社会で生きていくために必要となる力を共通して身に付けることのできる最後の教育機関であることから，（中略）多様な可能性を伸ばし，その後の高等教育機関での学修や社会での活動等へと接続させていくことが必要である。」（最終報告，p.13）と述べており，高等学校の担う責任の重さや，すべての高校生に対して，確実に学力をつけることの必要性などが改めて指摘されている。さらに中央教育審議会（2016）は「現状の高等学校教育，大学教育，大学入学者選抜は，知識の暗記・再生に偏りがちで，思考力・判断力・表現力や，主体性を持って多様な人々と協働する態度など, 真の「学力」が十分に育成・評価されていない。」（新しい時代にふさわしい高大接続の実現に向けた高等学校教育，大学教育，大学入学者選抜の一体的改革について～すべての若者が夢や目標を芽吹かせ，未来に花開かせるために～（答申），p.3）と述べており，現状の高等学校教育は知識偏重の側面があることを指摘している。現在のマークシート形式のみの大学入試センター試験から，新たに2020年度大学入試から導入される大学入学共通テストにおいて，国語と数学Ⅰに記述式解答が導入されるという流れは，この現状のままではいけないと考えるからであろう。

これまでに述べたような学校現場の現状や，中央教育審議会等の報告を鑑み，筆者らは国の主張する改革の方針や，次期学習指導要領，大学入試改革等の流れを踏まえ，生徒の深い学びにつながる授業実践が行えないか考えた。高校数学には多くの学習内容があるが，その中でも定着度が低く，生徒の学習意欲が低下しがちな単元での学習指導について焦点をあて，上記のような問題点を改善することを考えることにした。

2.　本授業の目標と本研究のねらい

2．1　本授業の目標

本研究では，既習事項の理解度の高さが求められ，かつ学習内容の難易度が高く定着度の低い単元の一つであ

*徳島県立徳島中央高等学校
**鳴門教育大学　高度学校教育実践専攻（教職系）

る「関数のグラフ」に着目して，その教材開発と学習指導案を作成した。例えば「関数のグラフ」について，数学Ⅱでは３次関数や４次関数，数学Ⅲでは様々な関数のグラフの概形を捉える単元がある。数学Ⅱの学習ではほとんどの生徒が，一定の手順に従って増減表を作成し，それをもとにグラフを正確にかける。数学Ⅲを学習する段階では既習の関数が増えているが，そのことを除けば数学Ⅱと数学Ⅲではグラフの捉え方に関して大きな違いはない。しかしそれにも関わらず数学Ⅲで扱う「関数のグラフ」は，生徒にとって苦手意識が強く，定着度も低い。生徒の典型的な反応は，増減表が正確にかけない，定義域を考えていない，その場面で適切な式変形ができないなどである。その原因として，生徒側には⑴既習事項が整理されておらず，バラバラの知識であること，⑵基本的な用語や記号について理解が浅いこと，授業者側には⑶単元間のつながりを意識し，考慮した授業展開ができていないことなどが考えられる。

そこで第１筆者はこの現状を打開するために「関数」を領域として捉え，体系的な理解につなげられないかと考えた。小学校算数科では「A 数と計算　B 図形　C 測定／変化と関係　D データの活用」，中学校数学科では「A 数と式　B 図形　C 関数　D データの活用」という４領域が明示され，単元間あるいは学年間のつながりを意識したものになっている。しかもそれらは小学校「C 変化と関係」から中学校「C 関数」といったように，異校種間でも学習内容が円滑に接続しており，生徒は関連事項のつながりや広がり，さらには理解を深められる構成になっている。一方，高校数学では学習指導要領解説等にもこれらの領域などについては明示されておらず，各科目の単元に目を向けても関数を領域として統合的に扱っていない。もちろん学習指導要領に記述されていなくとも，授業者がこれらのつながりを意識し，それぞれ関連する単元で教材への理解を深める工夫や教材研究は欠かせない。しかし関数は，数学を学ぶ上で基本的であると同時に，非常に重要な概念である。さらに生徒が苦手とする単元でもあり，中学校までの統合的な扱いがされていることを考えると，やはり高校でも関数を統合的に扱うことは重要であると考えた。

そこで，高校数学の既習事項を踏まえることに加えて，中学校までの既習事項についてもその理解を深められるものや，単元間のつながりを意識することができるもの，さらには自分の考え方やその根拠などを的確に表現することができるようになるなど，より深い学びにつなげられる力をつけるために必要な教材や授業展開などについて考えた。このような授業実践の必要性は，次期の高等学校学習指導要領解説数学編理数編（文部科学省, 2018）にも記されている。例えば「既習のものと新しく生み出したものとを包括的に取り扱えるように意味を規定したり，処理の仕方をまとめたりすることが統合的に考えることになる。数学の学習では，このように創造的な発展を図るとともに，創造したものをより高い，あるいは，より広い観点から統合してみられるようにすることが大切である。」（p.25，下線は筆者）とあり，より高い広い学びには，既習事項等を統合的に捉えることの重要性を述べている。また用語・記号の重要性については「数学の指導において極めて重要であり，具体的な内容と関連付けるなど，その意味や内容が十分に理解でき，用語・記号を用いることのよさが把握できるよう指導することが必要である。」（p.137，下線は筆者）と述べている。さらにこれらの学びが深い理解につながることが「数学における基本的な概念や原理・法則を理解することは，数学における様々な知識の裏付けとなり，技能の支えとなるものであり，深い学びを実現する上で欠かすことができないものである。」（p.28）と述べている。なお「数学の学習を通して育成される，自らの考えや判断の前提を明確にし，根拠を示しながら考えや判断について的確な説明をして他に理解を得る力はとりわけ重要な力であると言える。」（p.8，下線は筆者）とあり，学習において，なぜそうなるのかといった根拠の部分を考えることの重要性も指摘されている。

2. 2　本授業の概要

2. 1で示したような次期の学習指導要領等の指摘を踏まえ，第１筆者は数学Ⅲで扱う「関数のグラフ」についての理解を深めさせるためには，数学Ⅲを学習するより以前の，数学Ⅰ・数学 A・数学Ⅱ・数学 B を学習する段階で，関数についてより理解が深まるような教材や授業展開が必要であると考え，実践授業実施校や生徒の状況を考慮し２～３時間の授業計画を立てた（以下，本授業）。

具体的には２年生理系生徒に対し，分数関数を題材とした授業を行った。本来，分数関数は数学Ⅲで学習するが，定義域，値域，漸近線，平行移動などを考慮すればその概形を捉えられることに配慮して，数学Ⅲを履修していない２年生の生徒でも十分理解できる内容にした。もちろん本授業の目的は「数学Ⅲの分数関数の先取り学習をする」ことではない。分数関数を題材として，既習事項を確認することや，用語や記号の正確な理解を促し，さらには体系的な理解につなげることが目的である。そのため中学校１年で扱う関数 $y=\frac{1}{x}$ を用いて関数の定義，定義域や値域，漸近線，グラフの概形や対称性などについて確認した。それを踏まえ，「$y=\frac{1}{x}$ のグラフを平行移動する」ことを用いて分数関数 $y=\frac{1}{x-1}$ のグラフを扱った。さらに，数学Ⅲでの学習内容とのつながりを意識し，関数 $y=x+1$，$y=\frac{x(x+1)}{x}$ の違いについて，定義域を確認させることより明確に理解できるようにした。また本授業では事前課題プリント，授業用ワークシート，数学Ⅰ

と数学Ⅱの教科書を教材として用いた。そして，既習事項を素早く確認させるために，教科書を多用した。また頻繁に教科書を活用することで，生徒自身に単元間のつながりや，正確な用語や記号を用いることの重要性などを認識させ，それらの理解を深める機会にしてほしいとのねらいもあった。

授業の概要について，以下にまとめる。

〈本授業の概要〉

第1時	①〈関数 $y=\frac{1}{x}$ のグラフ〉 $y=\frac{1}{x}$ のグラフを用いて，関数の定義，定義域，値域，漸近線，対称性の確認 ②〈関数 $y=\frac{1}{x-1}$ のグラフ〉 関数 $y=\frac{1}{x-1}$ などのグラフの概形，平行移動，対称移動の復習

第2時	③〈関数 $y=x+1$，$y=\frac{x(x+1)}{x}$ の考察〉 $y=x+1$，$y=\frac{x(x+1)}{x}$ は同じ関数ですか？ $y=\log_3 x^2$，$y=2\log_3 x$ は同じ関数ですか？

第3時	④関数 $y=x+\sin x$ のグラフを「和の形」に着目して概形をかく ⑤偶関数，奇関数の定義 ⑥単位 $x^2+y^2=1$ や正方形 $\lvert x\rvert+\lvert y\rvert=1$ の対称性 ⑦周期関数の定義，基本的な関数の周期 ⑧関数 $y=2^{\sin x}$ や $y=\sin(\sin x)$ の周期を考える

なお④～⑧については，発展的な内容を扱うことで関数へのより深い理解につなげられるよう計画した。しかし本授業では時間制約があり実施できなかった。

2．3　本研究のねらい

本研究では，関数の式とグラフの関連を捉える本授業を通して，第１章で示した問題点を解消しようとした。そこで本授業では，以下の２点（A）（B）に着目し，本研究の成果と課題を明らかにする。

(A)　既習事項の表面的な理解にとどまらずその意味や概念を理解することや，単元間のつながりを意識し，バラバラだった知識を統合した体系的な理解や深い学びにつなげられる教材開発の工夫と，その教材を活用した実践授業の分析・考察をする。

(B)　本授業が，理解不足の自覚や意識化から学習への意欲などの情意面へどのような影響を与えたか，アンケートの記述内容をもとにした分析・考察をする。

3　本授業について

3．1　本授業の対象

実施校：徳島県西部に位置する県立の全日制普通科高校である。国公立大学への進学希望者が多く，ほとんどの生徒が大学等へ進学する。

実施クラス：２年生理系クラス

24HR（33 人）　25HR（33 人）

26HR（26 人，公欠９人は後日授業動画視聴）

実施時期：24HR・25HR　2017.12.14（45 分×２）

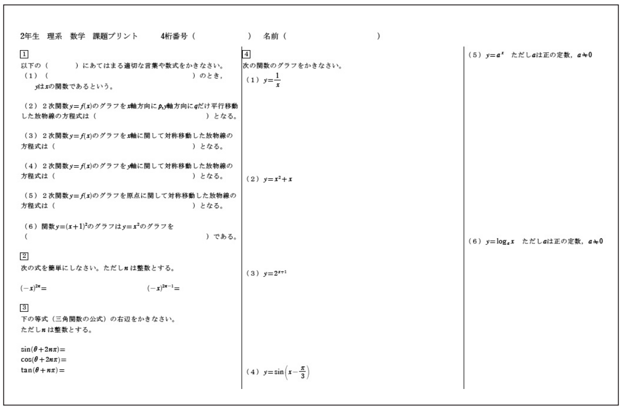
26HR　2017.12.15（45 分×２），12.27（60 分×１）

3．2　本授業の流れ・生徒の反応

本稿では，３クラスで実践した２時間分の内容を，授業の場面ごと①②③（〈本授業の概要〉参照）で示す。実際の授業での１時間目にあたる部分が（あ）～（け），２時間目にあたる部分が（こ）～（つ）である。なお生徒の反応のうち，４章の考察で触れる箇所に１）～６）を記した。

①〈関数 $y=\frac{1}{x}$ のグラフ〉の場面

（あ）事前に配布した復習プリントの答え合わせを行った。多くの生徒が，事前に解いてきていた。用語「関数」は本授業において重要な用語である。そのためクラス全体で「２つの変数 x，y について，x の値を決めるとそれに応じて y の値がただ１つに定まるとき，y は x の関数である」ことを，数学Ⅰ教科書（高等学校数学Ⅰ，数研出版，p.66）を用いて確認した。


2年生　理系　数学　課題プリント　　4桁番号（　　　　）　名前（　　　　　　）

1
以下の（　　）にあてはまる適切な言葉や数式をかきなさい。
（1）（　　　　　　　　）のとき，y は x の関数であるという。
（2）２次関数 $y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した放物線の方程式は（　　　　　　）となる。
（3）２次関数 $y=f(x)$ のグラフを x 軸に関して対称移動した放物線の方程式は（　　　　　　）となる。
（4）２次関数 $y=f(x)$ のグラフを y 軸に関して対称移動した放物線の方程式は（　　　　　　）となる。
（5）２次関数 $y=f(x)$ のグラフを原点に関して対称移動した放物線の方程式は（　　　　　　）となる。
（6）関数 $y=(x+1)^2$ のグラフは $y=x^2$ のグラフを（　　　　　　）である。

2
次の式を簡単にしなさい。ただし n は整数とする。
$(-x)^{2n}=$　　　　$(-x)^{2n-1}=$

3
下の等式（三角関数の公式）の右辺をかきなさい。ただし n は整数とする。
$\sin(\theta+2n\pi)=$
$\cos(\theta+2n\pi)=$
$\tan(\theta+n\pi)=$

4
次の関数のグラフをかきなさい。
（1）$y=\frac{1}{x}$
（2）$y=x^2+x$
（3）$y=2^{x+1}$
（4）$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$
（5）$y=a^x$　ただし a は正の定数，$a\neq 1$
（6）$y=\log_a x$　ただし a は正の定数，$a\neq 1$

(1)　（　　　　　　　　）のとき，y は x の関数であるという。

（い）平行移動，対称移動については，復習プリントの答え合わせとともに，数学Ⅰ教科書（高等学校数学Ⅰ，数研出版，p.79 － 80）を用いて復習した。

既習事項であり，よくできていた。そのため細かい説明は行わず，教科書の記載内容の確認程度の振り返りを行った。・・・１）

「復習プリントに答えを書き込む」ことはよくできていたが，表面的な理解にとどまっている生徒が多いことは

予想できた。しかしここでは，これらの説明について時間を多くとらなかった。

> (2)　２次関数 $y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に p, y 軸方向に q だけ平行移動した放物線の方程式は（　　　　　　）となる。
> (3)　２次関数 $y=f(x)$ のグラフを x 軸に関して対称移動した放物線の方程式は（　　　　　　）となる。
> (4)　２次関数 $y=f(x)$ のグラフを y 軸に関して対称移動した放物線の方程式は（　　　　　　）となる。
> (5)　２次関数 $y=f(x)$ のグラフを原点に関して対称移動した放物線の方程式は（　　　　　　）となる。
> (6)　関数 $y=(x+1)^2$ のグラフは $y=x^2$ のグラフを（　　　　）である。

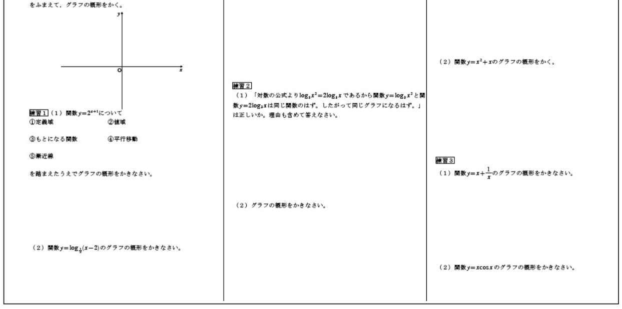
（う）復習プリントの４の関数 $y=\frac{1}{x}$ で，グラフの概形については，ほとんどの生徒がかけていた。ただし，第１象限のみにグラフをかいている，通る点を記入していない，漸近線を意識していないと思われるようなグラフをかいている生徒がいるなど，この関数の特徴的な部分を，正確に捉えているといえないグラフをかいているものも多かった。・・・２）

> 次の関数のグラフをかきなさい。
> (1)　$y=\frac{1}{x}$

（え）そこで，関数 $y=\frac{1}{x}$ において，クラス全体に定義域を問いかけたが，正しく答えられなかった。値域を答えている生徒もいるような状況であった。また，「０以外の実数」という生徒に対し「なぜ０以外なの？」と問うと，「$x=0$ のとき $y=0$ だから」と答える生徒もいた。そこで第１筆者が「０で割ることができないこと」などの補足説明を加えた。その後，「定義域，値域」の用語について，数Ⅰの教科書で確認するよう指示した。

（お）さらに漸近線についても，数学Ⅱ教科書（数研出版，2014b，p.118）で $y=\tan x$ のグラフを用いて確認するよう指示した。関数 $y=\frac{1}{x}$ においては，x 軸，y 軸が漸近線になることを再度確認し，その上で各自が復習プリントにかいてきた $y=\frac{1}{x}$ のグラフが，これらの特徴をおさえた，正確なグラフになっているか見直すように指示した。

（か）ワークシート配布


2年生　数学　理系　【関数について】（１）概形の捉え方【定義域，値域，もとになる関数，漸近線，和や積の形】

1 関数 $y=\frac{1}{x-1}$ のグラフについて
①定義域　②もとになる関数はなにか
③平行移動　④漸近線
をふまえて，グラフの概形をかく。

練習１（１）関数 $y=2^{x+1}$ について
①定義域　②値域
③もとになる関数　④平行移動
⑤漸近線
を踏まえたうえでグラフの概形をかきなさい。
（２）関数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-2)$ のグラフの概形をかきなさい。

2 関数 $y=x+1$ と関数 $y=\frac{x(x+1)}{x}$ は同じ関数か，それとも違う関数か。理由も含めて答えなさい。

練習２
（１）「対数の公式より $\log_2 x^2=2\log_2 x$ であるから関数 $y=\log_2 x^2$ と関数 $y=2\log_2 x$ は同じ関数のはず。したがって同じグラフになるはず。」は正しいか。理由も含めて答えなさい。
（２）グラフの概形をかきなさい。

3（１）関数 $y=x+\sin x$ のグラフの概形をかく。（和の形）
（２）関数 $y=x^2+x$ のグラフの概形をかく。

練習３
（１）関数 $y=x+\frac{1}{x}$ のグラフの概形をかきなさい。
（２）関数 $y=x\cos x$ のグラフの概形をかきなさい。

②〈関数 $y=\frac{1}{x-1}$ のグラフ〉の場面

（き）$y=\frac{1}{x-1}$ のグラフの概形を，まずは自分で考えるように指示した（１分程度）。

ほとんどの生徒が手を動かせていなかった。・・・３）

分数関数 $y=\frac{1}{x-1}$ は数学Ⅲで扱うが，これは「中学校で学習する反比例 $y=\frac{1}{x}$ のグラフを x 軸方向に１だけ平行移動したもの」と捉えることができる。（い）でみたように

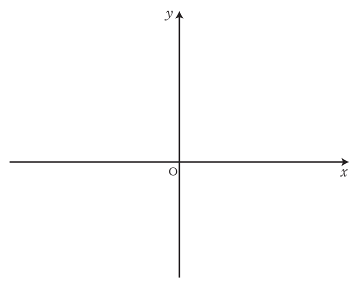
２次関数に関しては，平行移動について正確に理解している様子だった。・・・４）

しかし

この時点で $y=\frac{1}{(x-1)}$ について「$y=\frac{1}{x}$ において，x を $x-1$ に置き換えている形」とみなせる生徒はいなかった。・・・５）

そこで，授業者がワークシートの流れに沿って，定義域，漸近線，もとの関数の形，平行移動などに着目するよう指示した。これらを口頭で説明するだけでは，理解が進んでいない状況であったので，授業者が板書し，説明を加えた。この例では特に，もとの関数の形，平行移動の量，定義域を強調した。

> 関数 $y=\frac{1}{x-1}$ のグラフについて
> ①定義域　②もとになる関数はなにか
> ③平行移動　④漸近線
> をふまえて，グラフの概形をかく。



（く）その後，練習１を提示した。何とか自分たちで正答にたどり着いている様子が見受けられた。周囲の生徒とも議論するように促した。

> 練習１　(1)　関数 $y=2^{x+1}$ について
> ①定義域　②値域
> ③もとになる関数　④平行移動
> ⑤漸近線
> を踏まえたうえでグラフの概形をかきなさい。
> (2)　関数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-2)$ のグラフの概形をかきなさい。

（け）この時点で45分経過したため，休み時間になった。できれば休み時間中に，復習プリント（事前配布のプリント）の指数関数，対数関数のグラフの概形の答えあわせをするように指示した。指数関数はこの時間内で少し扱ったが，対数関数については苦手な生徒が多いこと，復習プリントの当該問題ができていない生徒がいること，さらに次時で細かい部分の復習をする時間をあまり多く取れないと判断して，休み時間を利用し，答え合わせや復習等をするように指示した。

（こ）授業再開時に，指数関数，対数関数の底による概形の違いを確認した。数学Ⅱ教科書（高等学校数学Ⅱ，数研出版，p.153，163）を活用し，どちらの関数も漸近線をもつこと，定義域と値域について，確認するように指示した。

（さ）練習1⑵の答え合わせを，周囲の生徒とするよう指示した。定義域，漸近線に着目し，グラフの存在するエリアに着目して考えようとしている生徒もいた。答え合わせの時に，板書は授業者で行ったが，定義域，漸近線，概形については生徒の発言を中心にまとめていった。

③〈関数 $y = x + 1$，$y = \frac{x(x+1)}{x}$ の考察〉の場面

（し）ワークシートの流れに沿って，「$y = x + 1$ と $y = \frac{x(x+1)}{x}$ は同じ関数か？」と質問した。２分程度個人で考える時間をとった。

多くの生徒が「x を約分している」状況であった。・・・6）

そのうえで，「同じ関数」と結論付けているものと「違う関数」と結論付けているものがいるような状況であった。中には「$y = x$（$x + 1$）と $y = \frac{1}{x}$ の積」で考えようとしているものもいた。その後，クラス全体に聞くとほとんどの生徒が同じ関数であると答えた。違う関数と挙手した生徒は３人であった。

> 関数 $y=x+1$ と関数 $y=\frac{x(x+1)}{x}$ は同じ関数か，それとも違う関数か。理由も含めて答えなさい。

（す）第１筆者がそれぞれの関数の「定義域を考えてみて」と問いかけた。次第に定義域が違うことに気づきはじめ，$x = 0$ で定義されないことから，違う関数であるとの結論に至った。

（せ）その後，これら２つの関数のグラフをかくように指示し，１分程度時間をとった。$x = 0$ では定義されず「○（白丸）」の部分があることを確認した。さらに，2017年12月現在で数学Ⅱの微分計算は学習済みであったため，極限値の計算の例を提示した。そして，$\lim_{h \to 0} \frac{h(h+1)}{h}$ の計算において，約分できることの理由等を説明した。

（そ）練習２を解くよう指示した。対数関数の定義域を捉えようとする生徒がいるが，手が動かない生徒が多かった。

> 練習２
> ⑴「対数の公式より $\log_3 x^2 = 2\log_3 x$ であるから関数 $y=\log_3 x^2$ と関数 $y=2\log_3 x$ は同じ関数のはず。したがって同じグラフになるはず。」は正しいか。理由も含めて答えなさい。
> ⑵ グラフの概形をかきなさい。

（た）数学Ⅱ教科書（高等学校数学Ⅱ，数研出版，p.165）の対数方程式など，対数の計算公式を適用する問題を確認した。真数条件（定義域）に十分注意しながら，式変形を行う必要があることなどを確認した。

（ち）改めて，練習２の２つの関数について，それぞれの定義域を問いかけた。少しずつ２つの関数の定義域の違いを理解する生徒がでてきた。完答している生徒はほとんどいないが，関数のグラフが存在するエリアに着目する生徒は増えていた。

（つ）生徒に考え方や解答を答えさせ，解説を授業者が行った。ここで時間終了した（ワークシート１枚目の半分程度しかできなかった）。

4. 本授業の分析と考察

4．1　授業展開①②③の分析と考察

①〈関数 $y = \frac{1}{x}$ のグラフ〉の場面

（う），（え）２年生になり，学習済みの関数やこれから扱う関数が増え，関数（定義域，値域，平行移動，漸近線など）についての理解が進んでいる状態であると期待，予想していた。しかしそれらについて現段階でも強く意識せずに，2）のように関数のグラフを捉えている状況であることが明らかになった。

②〈関数 $y = \frac{1}{x-1}$ のグラフ〉の場面

（き）１）の反応より２次関数の平行移動の出来は良いが，3），5）からわかるように平行移動の概念そのものは定着しにくいものであることを裏付けるような反応であった。

（く）指数関数は2017年10月に学習を終えていた。この実践授業を同年12月に実施しており時期が大きくずれていないことと，4）や（き）の指導により比較的よくできていた。

③〈関数 $y = x + 1$，$y = \frac{x(x+1)}{x}$ の考察〉の場面

（し）中学校３年の「多項式 ÷ 単項式」では割ることができる根拠を明確に示さず，約分の計算を行っている。中学校段階では，分数式の形式的処理に主眼が置かれ，それを修得させることが重要であることは理解できる。しかしそれを重要視するあまり，（分母）≠０や，（割る数や文字式）≠０には全く触れずに指導されている可能性が高い。中学校教科書（新版数学の世界3，大日本図書，2016）においても，安易に文字で割ることを実行して

おり，これが６）のような反応につながるのではないかと考えた。安易に文字で割ることを認めるような指導が中学校で行われているとすれば，生徒のこのような反応も当然である。

▶ **多項式を単項式でわる除法を行おう。**

2 $(2xy-6x)\div 2x$ の計算のしかたを考えよう。

ア　$(2xy-6x)\div 2x$

$=\dfrac{2xy-6x}{2x}$

$=\dfrac{2xy}{2x}-\dfrac{6x}{2x}$

$=\boxed{}$

イ　$(2xy-6x)\div 2x$

$=(2xy-6x)\times\dfrac{1}{2x}$

$=2xy\times\dfrac{1}{2x}-6x\times\dfrac{1}{2x}$

$=\boxed{}$

$(b+c)\div a$
$=\dfrac{b+c}{a}$
$=\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}$

$(b+c)\div a$
$=(b+c)\times\dfrac{1}{a}$
$=\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}$

[1] 2 つの計算のしかたを比べなさい。

多項式を単項式でわる除法を行うには，式を分数の形で表して簡単にするか，除法を乗法になおして計算すればよい。

（す）この部分については $y=\dfrac{x(x+1)}{x}$ の定義域について考えるが，(分母)$\neq 0$ という前時の $y=\dfrac{1}{x}$ の復習が効果的だったのではないかと考えている。

（せ）数学Ⅱで極限値計算はほとんど扱われないが，特に理系の生徒にとっては次の２つの理由で重要な場面である。１つめは「限りなく近づける」など極限の概念を計算で扱う初出の場面であり，当然これは数学Ⅲの学習へつながるからである。２つめは，$\lim f(x)$ の $f(x)$ 部分の分数関数の定義域について考えさせる好機であるということである。$h\to 0$ には０に限りなく近づけるという意味に加えて，$h\neq 0$ であること，そしてそれを根拠に $\dfrac{h(h+1)}{h}=h+1$ と約分できることなど，関数の定義域について理解を深めさせ，さらに極限についての基本的な概念を導入する重要な場面である。しかし数学Ⅱにおけるこれらの扱いでは例２，例３からわかるように，説明を付することなく，整関数の極限値計算から不定形０／０を扱う分数関数の極限値に飛躍するなど，教科書での記述は大雑把である。

「数学Ⅲで学ぶからこの程度でよい」あるいは「時間をあまりかけずに，できるだけ簡単に済ませようとする」のでは深い理解は望めない。生徒の学ぶ力や理解できる可能性を信じたい。関数について理解を深めるチャンスであるからこそ，導入や展開を工夫することで数学Ⅲの履修前に関数について考えさせるいいタイミングであるはずである。しかし，そのような展開を実施しにくい単元構成あり，教科書での扱いも同様である。授業者はこのことを念頭に置き，指導する必要がある。中学校での学習では，分数式の計算は機械的に処理し，浅い理解にとどまっている可能性が高いこと，さらに高校２年生の段階でも関数の定義域などについて深く理解しているとは言えない現状をふまえ，関数の理解を深めさせる授業展開を考える必要がある。

（そ），（た），（ち），（つ）ここまでこのワークシートで

第１節　微分係数と導関数　175

B 極限値

例１で求めた平均変化率 $2+h$ の値について，x の変化量 h を

0.1，0.01，0.001，0.0001，……

または　−0.1，−0.01，−0.001，−0.0001，……　←$h<0$ でもよい。

のように，０の両側から０に限りなく近づけてみよう。下の表からもわかるように，$2+h$ は２に限りなく近づく。

h	−0.1	−0.01	−0.001	−0.0001	…	0	…	0.0001	0.001	0.01	0.1
$2+h$	1.9	1.99	1.999	1.9999	…	2	…	2.0001	2.001	2.01	2.1

このことを，

h が０に限りなく近づくとき，$2+h$ の **極限値** は２であるといい，記号 **lim** を用いて次のように書く*。

$$\lim_{h\to 0}(2+h)=2$$

〈注意〉 h が０に限りなく近づく場合，h は０と異なる値であると約束する。

一般に，関数 $f(x)$ において，x が a と異なる値をとりながら，a に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくならば，α を x が a に限りなく近づくときの関数 $f(x)$ の **極限値** という。このことを，次のように書く。

$$\lim_{x\to a}f(x)=\alpha \quad \text{または} \quad x\longrightarrow a \text{ のとき } f(x)\longrightarrow \alpha$$

例 2　(1) $\lim_{x\to 1}(3x+1)=4$

(2) $\lim_{h\to 0}(3+3h+h^2)=3$　終　←$3h$ と h^2 はどちらも０に限りなく近づく。

練習 2　次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x\to 2}(x^2+1)$　(2) $\lim_{h\to 0}(6+h)$　(3) $\lim_{h\to 0}(12-6h+h^2)$

＊ lim は「極限」を意味する英語 limit の略である。

176　第６章　微分法と積分法

C 微分係数

関数 $f(x)$ の，$x=a$ から $x=a+h$ までの平均変化率

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

において，h が０に限りなく近づくとき，この平均変化率が一定の値に限りなく近づくならば，その極限値を

関数 $f(x)$ の $x=a$ における **微分係数** または **変化率**

といい，$f'(a)$ で表す。

$f(x)$ の $x=a$ における微分係数

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

例 3　(1) 関数 $f(x)=x^2$ の $x=2$ における微分係数は

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-2^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(4+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(4+h)=4$$

(2) 関数 $f(x)=x^2$ の $x=a$ における微分係数は

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2-a^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2ah+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2a+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(2a+h)$$

$=2a$　終

練習 3　関数 $f(x)=3x^2$ について，次の微分係数を求めよ。

(1) $f'(1)$　(2) $f'(-2)$　(3) $f'(a)$

D 微分係数と接線

関数 $f(x)$ が $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ をもつとき，グラフにおけるその図形的な意味を調べてみよう。

は定義域について，（分母）≠０しか扱っていなかったが，この練習問題は対数関数の真数条件に着目できるか，そこから定義域やグラフの存在するエリアについて着目できるかなど，定義域についての理解の確認あるいは理解を深めるためのものである。この実践授業では対数関数についてほとんど触れていなかったが，関数のグラフの存在するエリアを定義域から考察しようとする生徒がいるなど，（し）（す）（せ）の指導がつながっているとみられる反応があった。このタイミングで，なぜ定義域を考える必要があるのかを，生徒が考えたり気づく機会を与えることが，既習事項への理解を深め，さらにはそれが数学Ⅲの学習への素地をつくるのではないかと考える。

4．2　自由記述アンケートから

4．2．1　結果

Grounded Theory Approach（GTA）の手法で実践授業後の自由記述アンケートを分析した。次の11のカテゴリーに分類することができ，件数については以下の表のとおりである。生徒の関数に対する理解の浅さや苦手意識はアンケートへの記述内容から読み取れる。

GTA による分類		件数	全体比
情　意	1 意欲	30	16.6%
	2 おもしろかった	9	5.0%
	3 たのしかった	5	2.8%
	4 わかりやすかった	12	6.6%
	5 むずかしかった	6	3.3%
	6 感謝	15	8.3%
学　習	7 理解の深まり	9	5.0%
	8 関数への理解の深まり	36	19.9%
	9 定義域，値域，漸近線などへの理解の深まり	24	13.3%
	10 理解不足の自覚	23	12.7%
情意・学習	11 その他	12	6.6%
	合計	181	100.0%

181件のデータに対して，『理解の深まり』９件，『関数への理解の深まり』36件，『定義域・値域・漸近線などへの理解の深まり』24件，『理解不足の自覚』23件と，学習内容への理解の深まりなどに言及したものが全体件数の50.8%あった。その中には「別の観点から考えるくせを付けたいと思った」「関数の捉え方が変わった」「今まであまり考えてこなかった定義域，値域のことがよくわかりとてもよかった」「はじめは難しいと思っていた関数のグラフもきちんと段階を踏んで考えていくと簡単にかけたので面白かった」「定義域の大切さを知ることができた」「今まで定義域とかほとんど気にせず解いていたが，今回の授業でいかに定義域が大切か分かった」「定義域や漸近線を捉えることでけっこう簡単に捉えられた」などといった記述が見られた。また今後の学習への意欲向上に言及した『意欲』30件，『おもしろかった』９件，『楽しかった』５件，『分かりやすかった』12件，『感謝』15件であり，全体件数の39.2%であった。「数Ⅰを振り返ろうと思った」「数Ⅲに関わってくるので今回の授業はきちんと整理しておきたい」「数学Ⅲもがんばろうと思いました」「関数に関して興味が深まりました」「いつもと違った観点で数学について学べて楽しかったです」などである。さらにこれらに加えて，『理解の深まり』『関数への理解の深まり』『定義域・値域・漸近線などへの理解の深まりなど』に言及したものを数えると140件あり，これは全体件数の77.3%になる。

『難しかった』が６件ある。この生徒に着目すると「関数においての定義域の重要さが分かった。授業は難しかったような気がした」「１年生の時にやったグラフとかはほとんど忘れていたし用語のチェックとか復習になったのでよかったです。２年の範囲になるとグラフの形が複雑になって難しかったです」「難しかったが，ためになる話でよかった。数Ⅰ，Ⅱの復習ができたし，入試にも大事なものだと思ったのでしっかり覚えておきたい」「関数の勉強になった。難しかったが，別の観点から考えるくせを付けたいと思った」「習っていたところでも『定義域』や『値域』を聞かれるとそれが何なのかわかっていないことに気づいた。何をしているのかわからないところもあった」「忘れていたところ，苦手なところを復習できた。わかりやすかった。ただ２枚目のプリントを解く時間が短く，ペースが速かったのでもう少しゆっくりと進めてほしかった」という記述があった。また，カテゴリーとしては『難しかった』とラベリングしたが，その生徒の記述をみると，単に難しかったということの前後に，別の視点で考えることの重要性や関数の理解の深まりなどへの言及のある生徒が６件中５件いた。

この結果を踏まえ，以下の分析では生徒個人の学習面への影響や意欲の向上を分析・考察する。なお，４．２．３では，人数ベースで論ずる。

4．2．2　ねらい（A）の分析・考察

ねらい（A）は既習事項の表面的な理解にとどまらずその意味や概念を理解することや，単元間のつながりを意識し，バラバラだった知識を統合した体系的な理解や深い学びにつなげられる教材開発の工夫と，その教材を活用した実践授業の分析・考察である。

本授業での③〈関数 $x+1$，$y=\frac{x(x+1)}{x}$ の考察〉の場面において，理解が深まった，と述べているものが２件，約分できると思っていた，との趣旨のものが６件あった。さらにこれらの生徒についてアンケートをみると「楽しかった」「基礎内容を上手に使って，難しいと思っていた問題が解けて楽しかった。大変面白い授業だった」「グラフをかくのが苦手だったので，先生の授業を聞けて良

かった」「かなり面白かったです」「将来は数学を使う仕事をやりたいと思っているので，さらに今回の授業を受けて数学にもっと興味をもつことができました」「概形の考え方がおもしろいと思った」といったような，関数への理解の深まり，定義域・値域・漸近線などへの理解の深まり，さらには意欲や感謝の言葉を記述しているものがある。これらのことからも，定義域の重要性や関数の概形の捉え方などについて，深く理解することに結び付いている。

適切なタイミングで，既習内容を振り返ることにより，単元間のつながりを意識できるようにしたかった。過去に学習したことが，現在学習している内容につながっていること，さらに今後の数学につながっていくことを実感できるようにしたかったのである。このことは関数の学習だけに限られたことではなく，数学のあらゆる分野で同じことがいえることを感じてほしいと考えていた。例えば，図形の性質について平面幾何で習ったからそれで証明できさえすればいい，という態度ではなく，さらに座標平面やベクトル，複素数平面ではどうなるのか，などと様々な視点で，一つの問題を捉えようとする態度である。生徒にとって，過去の学習内容を，単なる知識として蓄積するだけではなく，生きた，使える，つながる知識として捉えさせるチャンスにしたい。このねらいに対して「いろいろな問題に応用できると思った」「根本的なところにこそ発展につづく過程があることがわかった」「やはり数学では様々な解法を考えるのが重要だと思いました」「いろいろな視点から見えるようにいろいろな知識をもつことが大切だと分かりました」など，一つの問題に対して多面的，多角的に捉えることの重要性に気づいたと思われる生徒も複数いた。

GTAによる分類		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
情意	1意欲	28	0	3	1	1	2	0	8	6	7	2
	2おもしろかった	0	8	0	0	0	0	1	3	1	1	1
	3たのしかった	3	0	5	0	0	1	0	1	2	1	1
	4わかりやすかった	1	0	0	12	1	3	0	4	0	2	1
	5むずかしかった	1	0	0	1	6	1	0	1	1	2	2
	6感謝	2	0	1	3	1	14	1	2	5	2	0
学習	7理解の深まり	0	1	0	0	0	1	9	2	1	4	1
	8関数への理解の深まり	8	3	1	4	1	2	2	30	7	4	5
	9定義域，値域，漸近線などへの理解の深まり	6	1	2	0	1	5	1	7	22	2	1
	10理解不足の自覚	7	1	1	2	2	2	4	4	2	22	0
11その他（情意・学習）		2	1	1	1	2	0	1	5	1	0	11

4. 2. 3　ねらい（B）の分析・考察

ねらい（B）は理解不足の自覚・意識化から学習意欲の向上といった情意面への影響を受けた生徒がいるのではないかという点に関しての，分析・考察である。11×11クロス集計から次のような特徴がみられた。

『関数への理解の深まり』『定義域，値域，漸近線などへの理解の深まり』『理解不足の自覚』のまとまりでみると，それらの項目の中での件数が多いものに関して情意面への影響がみられる。

『意欲』28人に対して，8，9，10が21人で75.0%（以下28－21－75.0%と表記する)，『おもしろかった』に関して8－5－62.5%，『たのしかった』に関して5－4－80.0%，『わかりやすかった』に関して12－6－50.0%，『感謝』に関して14－9－64.3%である。『意欲』を記述したものの多くは『関数への理解の深まり』『定義域，値域，漸近線などへの理解の深まり』『理解不足の自覚』を同時に記述していることから，理解が深まることで意欲を向上させることにつながったとみることができる。

また『理解不足の自覚』に記述したものについて，次の2点に着目したい。1点目は情意面において，分からないことやできないことを自覚したにも関わらず，意欲を低下させることなく，逆に意欲が向上したという反応を示していることである。「わからない，だからおもしろくない」ではなく「わからない。だけどおもしろい」という反応を見せてくれた。『理解不足の自覚』の22人中，50%の11人の生徒がこれらのことに言及している。このことは授業者としてはうれしい反応である。2点目は学習面において，『理解の深まり』『関数への理解の深まり』『定義域，値域，漸近線などへの理解の深まり』が22人中10人（45.5%）いるという点である。関数に関する理解が深まると同時に，学習が不十分であることに気づくなど，生徒自身のメタ認知が進んでいると考えることができる反応である。以上の2点から，単なる関数の問題という立場で授業するのではなく，既習事項が今の学習にどのようにつながっているのか，あるいは今後どのような学習に発展するのかなどを明確に授業者が伝える授業を実践することや，さらに学習者の最近接発達領域を刺激する教材を用いることの重要性を認識した。

5. おわりに

関数の学習を進めるにあたり，数学的に考察し，変化の様子や関数の特徴について知ることは非常に重要である。それと同時に，定義域や値域を捉えることや，座標平面上のどのあたりにこの関数のグラフが存在するかなど，関数を大域的に捉えようとすることも重要である。そのとき必要となる，関数や定義域などの定義のような，基本的な概念が単なる知識として蓄積されているだけではなく，その概念の意味やよさ，必要性や必然性などを生徒自身が認識することにより，バラバラの知識が統合され，より深い理解につながるのではないかと考えた。そこで生徒の関数への理解の深まりをねらいとして，既習事項との関連を意識した教材を用いて，関数を領域として捉えた授業を実践した。

本授業中の生徒の反応や本授業後のアンケートなどからは，学習面への好影響ということがうかがえる。実際に本授業の実践前後の評価問題分析[1]では，正答数の増加や，未記入者数の減少などがみられた。また同年３年生理系生徒との比較分析からも本授業の学習効果が確認できた。

さらにこの実践からは，理解不足の自覚が意欲の向上につながるなど，学習面への影響だけではなく，意欲の向上といった情意面への影響がみられるなどの成果があった。これは，難しいけどおもしろい，もっと知りたいと考える生徒がいることを示している。内容が難しいから，結果だけを述べて，簡単に済ませる，といった授業展開だけでは，生徒の「もっと知りたい」「なぜ？」の部分に応えられない。小学校算数科から中学校数学科への接続は学習指導要領でも明記されているが，その部分を高校数学が途切れさせてはならない。生徒の学びをつなげる必要がある。そのためには授業者自身が，生徒の学ぶ意欲を向上させ，深い理解を促すための方策を考えなければならない。生徒のこれまでの学習内容と実態をふまえ，単元間のつながりを意識しそれを教材に反映させる教材研究や他の教員との協議などが欠かせないことを再認識させられた。

また高校入学段階での既習事項に関して，想定以上に理解が浅いということも明確になった。多様な生徒への対応が求められる中学校においては，答えのみを求めさせる場合や形式的に処理する場面が多い。その反面，正確な用語や記号を用いながら，考えや根拠を記述させる場面などは少ない。これらの現状をふまえ，高校入学後の生徒理解や教材研究につなげることが重要であり必要である。

一方，実践授業以前から適宜授業補助に入るなど生徒の理解度や学習状況について把握するようにしたが，当初の計画通り本授業が進まない部分があった。限られた時間内での授業実践となってしまったため，生徒同士や授業者，またクラス全体で議論するなどの場面が少なくなった。的確に生徒の状況を把握できていれば，生徒自身が自分の考えやその根拠を記述・表現し，議論する場面をもっと設定できていたはずであり，改善すべき点である。今後は，本実践授業を受けた2018年度３年生理系生徒を対象とした追跡調査，あるいは関数のグラフ以外の定着度の低い単元，例えば数列や場合の数などについて生徒の深い学びにつながる教材開発や授業展開等について検討したい。

文　献

中央教育審議会,『新しい時代にふさわしい高大接続の実現に向けた高等学校教育，大学教育，大学入学者選抜の一体的改革について～すべての若者が夢や目標を芽吹かせ，未来に花開かせるために～（答申)』，2016.

高大接続システム改革会議,『高大接続システム改革会議「最終報告」』，2016.

文部科学省，『高等学校学習指導要領解説数学編理数編』，2018.

数研出版，『高等学校数学Ⅰ』，2014 a.

数研出版，『高等学校数学Ⅱ』，2014 b.

数研出版，『高等学校数学Ⅲ』，2014 c.

戈木クレイグヒル滋子，『グラウンデッド・セオリー・アプローチ　理論を生みだすまで』，新曜社，2014 d.

佐藤郁哉，『質的データ分析法　原理・方法・実践』，新曜社，2011.

[1]授業実践前後における評価問題の分析等については，第１筆者の最終成果報告書（2019）を参照されたい。