

数学の理解を深めるアクティブ・ラーニングに関する研究

— 6つの缶を縛ったひもの長さを考える活動を通して —

三戸部貴弘*, 横田 幸治*, 原野 友佑*, 榎 源太*
金森 勇斗*, 谷口 誠崇*, 仲田 雄人*
秋田 美代**, 佐伯 昭彦**, 島尾 裕介***

(キーワード: アクティブ・ラーニング, 授業モデル, 平面図形, 根拠のある説明)

1. はじめに

平成29年3月に告示された新学習指導要領では、主体的・対話的で深い学びの実現に向けて、教科等の本質的な学びを踏まえたアクティブ・ラーニングの視点からの学習・指導方法の改善が求められている。授業者は、生徒に数学をより深く理解させるために、生徒が身に付けた知識や技能を活用し、他者と共有しながら多様な表現を通じて、思考を深められるような授業を構築する必要がある。

本研究の目的は、学習者の数学の理解を深めるためのアクティブ・ラーニングの手法を提案することである。そこでは、問題解決の際に既習の定義・定理・性質など明確な根拠を基に自分の問題解決の筋道の正しさを説明したり、他者の説明を聴いて論理の妥当性を判断したりすることを通して思考を活性化させ、数学の理解を深めさせる。中学2年生を対象に、6つの缶を縛ったひもの長さを題材とした授業を実践し、提案するアクティブ・ラーニングの手法が生徒の数学の理解を深めるために有効であるかを検証する。

2. 生徒の現状と課題

OCED（経済協力開発機構）が実施する Programme for International Student Assessment (PISA) は、義務教育修了段階の15歳児を対象に、それまで学校や様々な生活場面で学んできたことを、将来、社会生活で直面するであろう様々な課題に活用する力がどの程度身に付いているかを測定する調査である。

OECDの生徒の学習到達度調査(PISA2015)における「数学的リテラシー」の結果では、日本の生徒の平均点は532点である。これは、OCED加盟35か国中1位、全参加72か国中5位であり、国際的に上位に位置してい

る。出題問題についての日本の平均正答率は54%であり、出題形式別に見ると「選択肢（複合的選択肢を含む。以下同様）」は64%、「短答」は54%、「求答」は53%、「自由記述」は33%である。平均無答率は6%であり、出題形式別に見ると「選択肢」では1%、「短答」では6%、「求答」では0%、「自由記述」は16%である。思考力・判断力・表現力等が問われる「自由記述」の問題で、正答率が低く、無答率が高いことから、自己の考えを根拠を基にして説明することに課題があることがわかる。

文部科学省が実施する全国学力・学習状況調査は、小学校第6学年、中学校第3学年を対象に、義務教育の機会均等とその水準の維持向上の観点から、全国的な児童生徒の学力や学習状況を把握・分析し、教育施策の成果と課題を検証し、その改善を図ることを目的に行われる調査である。

平成29年度全国学力・学習状況調査報告書【中学校／数学】では、「記述式問題のうち、事柄の特徴を数学的な表現を用いて説明することに課題がある」との課題が報告されている。記述式問題5問の正答率は22.5%である。誤答には、正答の条件の一部しか記述していなかったり、誤った理由を使って判断して記述したりする間違いがある。

これらのことから、生徒は問題を解決する際に、自分の考えを数学を使って論理的に考察し、数学を用いた表現で説明する力が十分に身に付いていないことがわかる。

通常の数学の授業では、数量・図形などに関する概念や原理・法則等を理解させた後、それらを用いて練習問題を解かすことで定着を図るという流れで進められることが多い。知識の定着を図ることを意図する練習問題においては、学んだ性質や定理がそのまま使える問題が多い。生徒が、獲得した知識を自分で問題の中から見つけること、知識同士を組み合わせることを実感できる機会が少ないという状況がある。そのために、生徒

*鳴門教育大学大学院 自然系コース（数学）

**鳴門教育大学 高度学校教育実践専攻（教科系）

***鳴門教育大学附属中学校

の中には、解答の流れを記憶して、答えが出せたから自分は数学を理解していると思っている生徒がいる。形式的に解法を覚える記憶に頼った学習では、知識と知識の関連付けが行えないため、新しい問題に直面したときに対応できず、応用問題や問題の文脈が変わった時には自分では問題解決できないという課題が生まれる。

3. 数学の理解を深めるアクティブ・ラーニング

(1) 数学の特性に沿った学習

算数・数学は、系統性の強い学問である。秋田 (2015) は、「数学は、数量・図形に関わる性質や関係について、定義・公理と呼ばれる正しいことを認める最小限の性質関係を基に新たな性質や関係を証明するという、公理に基づく手法で得られる体系を研究する学問である」と述べている。さらに「教員が図1に示す手法をはっきりと意識し、児童・生徒がこの手法を使って自分自身で新たな知識を創るように仕組まなければ、児童・生徒に自律的に算数・数学の理解を深めさせることは難しい」と述べている。数学の特性から生徒が、新しい問題に直面した時、問題の中にどのような既習の性質や関係があるかを自分自身で見つけ出し、それらを活用して考えていかなければ、自分の力で解決することは難しい。学校における数学の授業では、現在学習している分野に関わる問題が与えられるので問題解決で使用する定理や性質がわかりやすい。そのため、生徒は問題の中に既習の性質や関係を見い出して解決していくことをあまり意識せずに、直前に学習した定理や性質を用いて、安易に問題解決を行なっていることが推測できる。しかし、それでは問題の中に既習の知識を見つけ出したり、既習の知識を活用したりすることができず、生徒が数学の理解を深めていくことができない。そうならないためにも教師が、生徒自らが既習の知識と結び付ける活動や、問題解決に向けて見通しをもち、問題解決の過程を振り返る活動等を設けることが重要となる。

(2) 個人の理解を深める協同過程

石井・三輪 (2001) は、「創造的問題解決場面では1人独立で考えるよりも、2人で話し合いながら考えた方が独創性の高いアイデアが算出される」と述べている。平成29年度全国学力・学習状況調査の調査結果を踏まえた学習指導の改善・充実に向けた説明会の説明資料では、「話し合う活動を通じて、自分の考えを深めたり、広げたりすることができている」と肯定的な回答をした中学生の割合は64.8%であり、そのように回答した生徒の方が平均正答率が高い傾向が見られると報告されている。このことから、理解を深めたり、理解を広げたりするために、生徒が協同して問題解決に取り組む活動が有効に使えることが考えられる。

小田切 (2012) は、理解を深めることを「知識を既有知識と関連づけて、知識を再構造化すること」と定義し、個人の知識の再構造化を促進する協同過程の組織として、次の3つを挙げている。

- (ア) 精緻化されていないものも含む多様な考えが可能な課題を設定し、考えの発表を促すこと。
- (イ) 発表された根拠の明確化や不十分点の指摘が生徒にとってなされるよう、発問によって促すこと。
- (ウ) 生徒が自分の考えを明確にできるよう、既有知識を活用できる課題を設定し、個別解決の時間を十分にとること。

小田切の考えは、数学において知識を再構成するには、問題解決のために「既習の知識・関係を使って着想すること」、「数学を使って矛盾のない問題解決の筋道をつけること」、「数学を使って他者に納得できるような表現をすること」の必要性を述べている。数学の授業においては、生徒が意識して既習の知識を見つけ出し、数学的な活動ができるような状況の設定や発問を教師が行う必要がある。生徒に問題の中にどのような既習の性質や関係があるのかをしっかりと考えさせ、自身の解法に根拠を持たせることが重要である。そして、その考えの根拠を説明したり、他者の説明を聞いたり、議論をしたりする活動を通して、数学的な見方・考え方を鍛え、既習の知

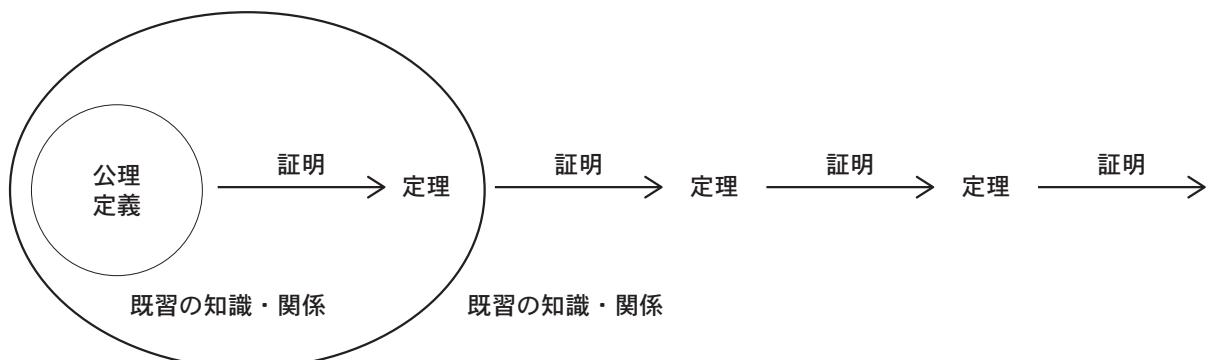


図1 数学の研究・学習における公理に基づく手法 (秋田, 20015 を改変)

識を相互に関連づけることで、より深く理解できたと生徒自身が自覚できるようにすることが大切である。

(3) 授業の構築

数学において新しい知識・関係は、既習の知識・関係を基にして生成されるという特性から、生徒の数学の理解を深めるには、授業で上記の(2)で述べた小田切(2012)の知識の再構造化を促進する協同過程を設定することが考えられる。

本研究において、知識の再構造化を促進する協同過程に「説明する」、「議論する」、「課題を解く」の3つの活動を取り入れる。

「課題を解く」活動は、生徒に自分の考えを持たせることをねらいとする。数学は、自分一人の力でアイデアを着想し、正しい根拠を基にした筋道だった論理が構成できなければ、理解できたことにはならない。生徒が自立した問題解決者になるために、個人での思考は不可欠である。

「説明する」活動は、生徒に数学を使った根拠のある説明をさせることをねらいとする。他者に納得できるように表現になるように、数学を使って矛盾のない問題解決の筋道をつくるためには、現在の問題と既習の知識・関係を結びつける必要がある。生徒が論理的・統合的な考え方を身に付けるために重要である。

「議論する」活動は、生徒に自分の考えと他者の考えとを関連付けさせ、自分の考えていなかった知識・関係を気付かせることをねらいとする。自分の考えや他者の考えを関連付けたりそれぞれの考えを補ったりすることで、異なる解法の中の共通の概念を見つけたり、同じ問題を複数の視点で捉えられるようにするために重要である。

これらの活動を図2の流れで構成し、3つの活動それぞれの中で、数学を使った表現・説明を行わせることで、生徒の数学の理解を深める。

本研究で提案する、数学の理解を深めるアクティブ・ラーニングの授業においては、生徒が課題から定義・定理・性質を見つけ出し、それらを根拠に説明する、既習の知識を相互に関連付けられる状況を設定する必要がある。

そこで、図2の数学授業のモデルの実施においては次の①～③に留意する。

- ①既習の知識・性質で解決できるが、既習の知識・性質を見つけようとする意識をしなければ問題解決の着想が得られない問題を与える。そのことにより、自分の知識を活用して問題に取り組むことを意識させ知識活用力を高めることを狙っている。
- ②課題から既習の知識・性質を見つけだし、それらを根拠にして数学を使った説明をする活動を行わせる。そのことによって、問題解決の過程を他者に理解させる

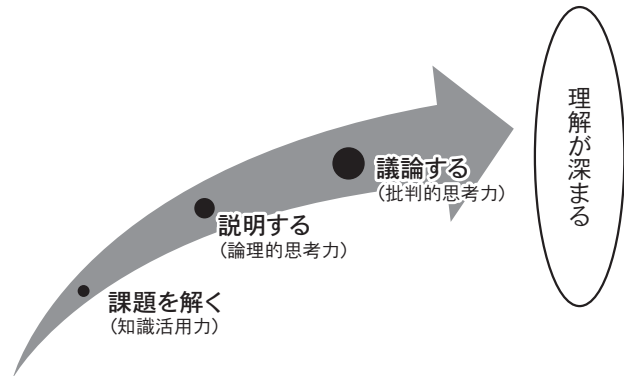


図2 数学の理解を深める過程の授業モデル

ために正しいと認められている性質・関係を基にした筋道立てた論理を構成させ表現させることで論理的思考力を高めることをねらっている。

- ③生徒が、解答に対して疑問や理解できない部分を質問・議論させ、問題解決の背景にある数学を明確に表現させる。そのことによって、問題解決において自他の考えを関連付けながら情報を精査し、どのような性質・関係を基に論理が構成されているかを考えさせることで批判的思考力を高めることをねらっている。

(4) 教材開発

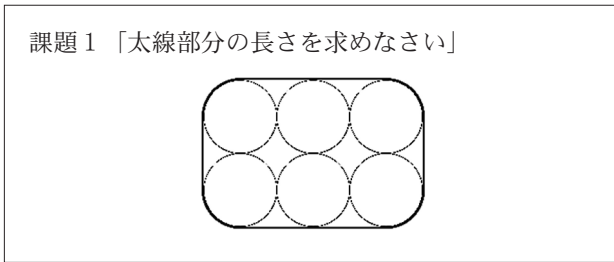
3.(1)で述べた課題点を克服するために、平行線の錯角・同位角の性質等の既習の知識を見つけ出し、課題解決できる問題を設定することにした。これまでに学習してきた平面図形の性質を根拠に説明する活動を通して、数学において説明をするときは定義・定理・性質などを根拠に説明する必要があるということを生徒に理解させることができると考えられる。見方を変えることで複数の既習の知識で解決することができる問題を与えれば、他者の解答を知ることによって多様な考え方が身に付き、図形における見方・考え方をより鍛えられる。

実践する授業では、与えられた図形の中から既習の図形の性質を見つけ、それらを活用して考える力を身に付けさせるために「与えられた図形から既習の図形の性質を見つけ、それらを根拠に説明する問題」が必要である。また、問題から簡単には平面図形の既習の知識を見つけ出せないようにする必要がある。しかし、教科書の中では図形の性質を捉えやすい簡単な図形の中でしか扱っていないため、それらを活用して考える力が身に付きにくいと考え、(3)の①簡単に図形の性質を見つけることができない問題、②図形の性質を根拠に説明する、③疑問がある場合は議論する、これらを踏まえた課題として「6つの缶を縛ったひもの長さ」を求め場面設定することにした。この課題は、6つの缶の配置を変えることにより、見出す図形及びその性質が変わるので、段階的に課題を与えることで、段階的に表現や説明の質を高めるこ

とが可能である。

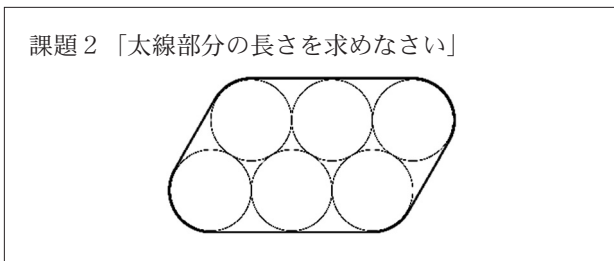
「6つの缶を縛ったひもの長さ」を求める場面で3つの課題を設定する。但し、3つの課題において缶の直径は全て等しいものとし、課題1と2は「長さを求める」が、課題3は「長さは比べる」ことにした。

課題1では、図の見た目から課題を解けるように設定した。



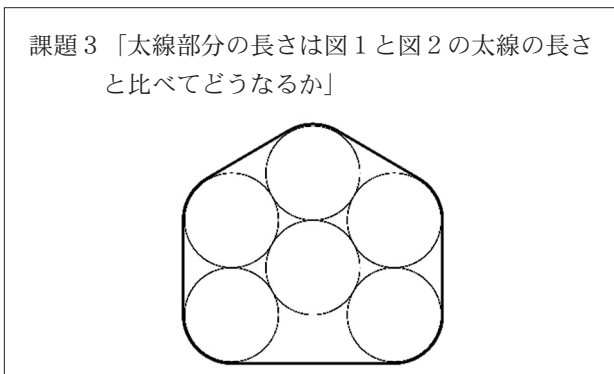
見た目から問題を解けるように設定する理由は、課題2は見た目では説明が正しいか判断することが難しいので、生徒が数学では定理や性質を基にして説明することが必要であることをより強く認識するための材料にできると考えたからである。

課題2では、課題1と違い図の見た目からは問題が解けないようにし、未知の図形から既習の図形の性質や定理を見つけ出して解けるようにした。また、課題1で使える性質や定理を使うことで解けるように設定した。



見た目から問題を解けない問題を対比させる理由は、課題2を解く段階で、生徒に解答を説明させ図形の性質や定理を根拠に解くことが必要であることを認識させるとともに、課題1で見た目から判断して問題を解いても、数学として正しいかは説明できたことにならないことを意識させることができると考えたからである。

課題3では、これまでの学習内容からは長さが求まらないように設定した。



これまでの学習内容からは長さが求まらないように設定する理由は、長さが求まらない場合でも既習の知識・性質を使えば長さは短くなると判断でき数学を使って説明できることを理解させるためである。

課題1と2は、円や直線など、複数の図が組み合わさっているため、簡単には図形の性質を捉えることができないが、図3、図4のようにいくつかの部分に分けて考えることで課題を解決しやすくなる。

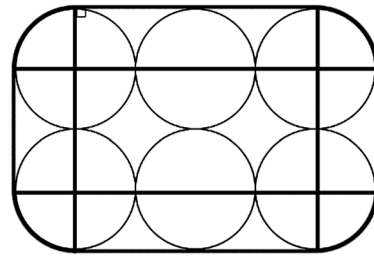


図3 課題1の考え方

図3と4では、課題1, 2におけるそれぞれの円の中心を直線で結び、円の中心から直線と円の接点に向かって直線を描いている。太線を直線部分と曲線部分に分けて考えることで、課題1の直線部分は、「円と接線の性質」や

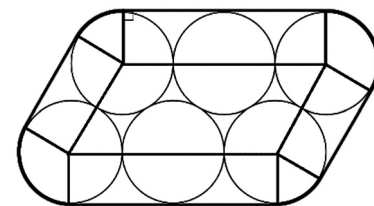


図4 課題2の考え方

「平行線の錯角・同位角」を使うことで描かれた四角形が長方形となることが分かり長さが求められる。次に曲線部分は、中心角が長方形の対頂角であるため 90° の扇形であることが分かり、4つの扇形の弧の長さの合計は扇形と同じ半径をもつ円の円周となるので求めることができる。したがって、太線の長さは円の半径を r とすると、 $2\pi r + 12r$ と求められる。課題2の直線部分は、課題1と同様に求めることができる。曲線部分は「平面図形の平行移動」や「平行線の錯角・同位角の関係」を使うことで4つの扇形の弧の長さの合計は扇形と同じ半径をもつ円の円周と同じになることが求められる。よって、課題2の太線の長さも $2\pi r + 12r$ となることが分かる。

課題3では、正確な長さは三平方の定理を習っていないため求めることができないが、課題1, 2に取り組むことで図5のように考えることができる。

図5も図3, 4と同様の方法で直線を描いたものである。曲線部分は課題1, 2と同様の考え方ので円周と同じになることが分かる。次に、直線部分の長さを求めたいが課題1, 2と同様に考えると二等辺三角形の底辺の

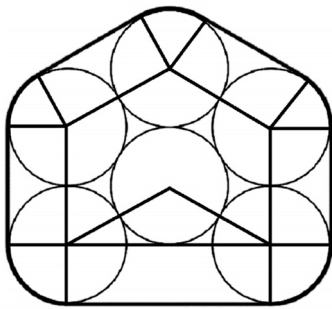


図5 課題3の考え方

長さを求めることができない。そこで、底辺の長さを a とすると、 $2\pi r + 8r + a$ となることは分かる。ここで、課題を考えるとき、既習の知識で解くことができることに気づいていれば、三角形の性質の一つである「三角形の2辺の和は残りの1辺より長くなる」を使うことで、 $a < 4r$ になることが分かる。よって、課題3の太線部分の長さは課題1, 2と比べて短くなるのが求められる。

4. 授業実践について

(1) 調査期間・対象

授業実践は、2017年12月15日に行った。対象は鳴門教育大学附属中学校第2学年である。実践の結果は、授業内の解答、ワークシート及びアンケートなどで分析した。

(2) 授業内容

授業実践では、開発した図形の太線部分の長さを求める問題として、まず課題1を生徒に提示した。今回は図形の見方・考え方を鍛えるために半径は与えないことにした。半径を与えると円の接線の性質などを使うことを想起させる誘導となり、生徒の多様な考え方を阻害する可能性があると考えたためである。また、3. (1)で述べた(i)を(u)取り入れるために、ただ問題を解かせるだけでなく、解答を前で発表させ、クラス全体で解答に対して疑問や理解できない部分がある場合は質問させ、生徒全員で議論する形をとった。

最初に課題1の太線部分の長さを考えさせた。この課題1は円の半径を r とし、円と接線の性質と平行線の錯角・同位角の関係を使えば説明できる。生徒には根拠のある解答をしなければいけないことを伝えずに取り組ませた。また課題1では生徒の解答に根拠がない場合でも、一旦その解答を認めて課題2に移ることにした。

次に、課題2を提示し太線部分の長さを考えさせた。課題1と同様に考えることができれば説明することができる。課題2では生徒の解答に根拠がなければ、なぜその解答で正しいといえるのか教師が質問し生徒に説明さ

せた。この段階で数学では解答するときには根拠が必要であることを生徒に気づかせる。生徒がそのことに気づいた後もう一度、課題1を基に根拠のある解答を考えさせる。生徒が、課題1で根拠のある解答ができた後、課題2を考えさせ、根拠のある解答をさせる。

最後に課題3を提示し、太線部分の長さを考えさせた。この課題は既習の知識では正確な長さを導き出すことができないが、「三角形の2辺の和は残りの1辺より長くなる」などを根拠に説明できるようにした。課題1をあえて深く掘り下げず課題2で掘り下げた理由として、課題1では見た目から直角以外に見えず、なぜ直角だと言えるのかを質問したときに解答に困ると考え、課題2で深く掘り下げることにした。また課題2で根拠のある説明をさせることで課題1の解答では十分でないことに気付かせ、数学において解答するときには根拠が必要になることを実感させ理解できると考えた。課題3ではあえて既習の知識では長さが求まらないように問題を設定したが、長さが求まらなくても既習の知識で長さが短くなることは説明でき、経験したことのない問題でも既習の知識で解決できると理解させることができる。

5. モデルの有効性について

(1) 分析と考察

図6は課題1に対する生徒の解答例である。

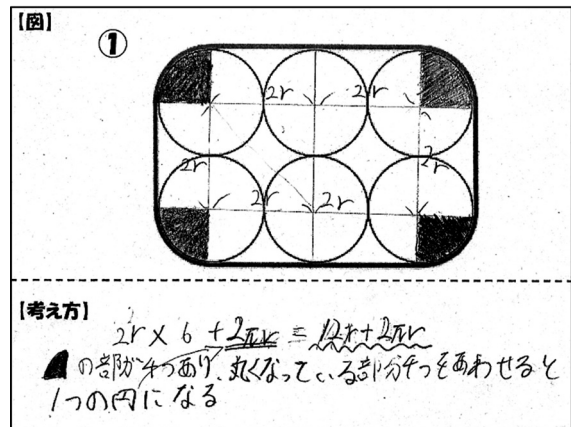


図6 課題1の生徒の解答例

課題1の解答では、根拠のある解答をしている生徒がほとんどいないこと、また解答に対して疑問を持つ生徒もいなかった。課題1は図の見た目からでもおおよその判断ができてしまうため、生徒は疑問を持たなかったと思われる。

次に、課題2の解答でも根拠のある解答を示す生徒はおらず、教師が発問しても返答がないことから、生徒は数学において解答には根拠が必要であるということが認知できていないと判断できる。教師が根拠のない部分を指摘すると答えられなくなっていることから、生徒は図

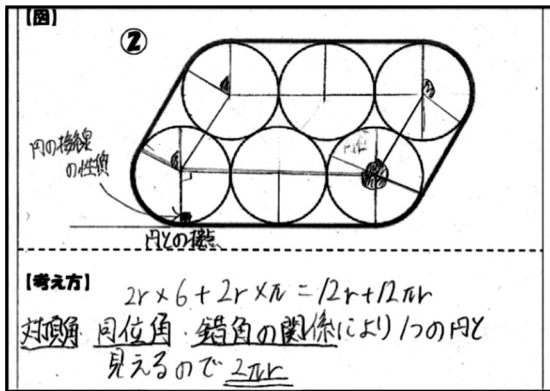


図7 課題2の生徒の解答例

形の性質を見つけ出せていない。発問の後、生徒から疑問を持つ声が聞こえてきたことから、この段階で、生徒は根拠のない解答は十分ではないことに気づいたと思われる。図7は課題2の生徒の解答例である。

課題3では、課題1, 2を取り組んだ成果が出ていた。解答にも根拠を持って説明することができていた。この段階では、生徒は根拠を基に解答していたことから、解答には根拠が必要であるということが認知させることができたと判断できる。

アンケートの結果からは、課題1で「性質を見つけられた場合はそれらを活用し解答した」と約52%の生徒が答えていたが、実際に説明させると根拠が不十分になっていた。また、「図形の性質を見つけることができなかった」の選択が約27%あることから図形における見方・考え方が十分に養えていないことがわかる。課題2で「性質を見つけられた場合はそれらを活用し解答した」と約55%の生徒が答えている一方で、「図形の性質を見つけることができなかった」の選択が約22%と課題1と比べて下がっていた。感想では「しっかり根拠を持って課題を解くことが大切だと思った」といった内容が多くあったことから、生徒に根拠のある解答をする必要があることを認知させることができたと考える。その一方で、図8のような「結局どうして直線じゃないところをたすと円の周になるのか分からなかった」や「説明することが難しかった」といった内容の感想もあった。

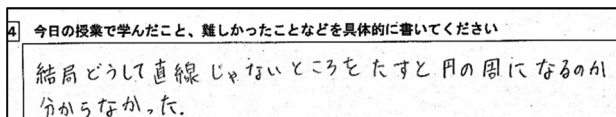


図8 生徒の感想例

(2) 提案した授業の有効性

課題1を解かせた段階では、生徒は十分な解答をできていないことが分かる。しかし、課題を解かせるだけの授業をしていた場合、生徒の理解度を把握することは困難であったといえる。課題2を解かせ、解答を説明させることで生徒の理解度を把握できるとともに、生徒自身も数学で他者に納得してもらって解答をするには、定理や

性質を根拠に説明することが大切であると認知できた。そのため、課題を解かせるだけでなく説明させることが有効であるといえる。考えたモデルの最後の段階である「議論する」までは至らなかったため、「議論する」有効性については今後検証する必要がある。しかし、アンケート結果にもあるように、生徒に自分の考えと他者の考えを関連付けさせ、自分の考えていなかった知識・関係を気付かせるために議論することは有効であると考えている。

6. おわりに

本研究では、数学の理解を深めるアクティブ・ラーニングのために図形の太線部分の長さを求めさせる活動を通して、既習の知識を新たな課題に活用すること、解答には根拠が必要になること、根拠のある説明が必要なることを理解できるようにするための授業を行なった。数学の理解を深めるためには、学んだ知識と知識をつなげることや身に付けた知識を根拠にして説明することが重要であると考えますが、今回の授業だけでは数学の理解を深めることは難しい。したがって、普段の授業から継続してこれらを意識した指導が必要である。

今後の課題として、生徒が課題から定義・定理・性質を見つけ出し、それらを根拠に説明する、既習の知識を相互に関連付けられる教材を「図形」以外の分野でも開発していく必要がある。

参考文献

- 秋田美代「教科内容学を基にした教員教育の改善－教科専門と教科教育の役割について－」, 日本教科内容学会誌 Vol.1 pp.29 - 39, 2015
- 石井成郎・三輪和久「創造的問題解決における協調認知プロセス」, 日本認知科学会誌第8巻2号, pp.151 - 168, 2001
- 小田切歩「数学授業における協同過程が高校生の指数関数的変化についての理解に及ぼす効果とそのプロセス」, 日本心理学研究第60巻第4号, pp.417 - 128, 2012
- 国立教育政策研究所「生きるための知識と技能6 - OCED 生徒の学習到達度調査 (PISA) 2015年調査国際結果報告書 -」, 明石書店, 2016
- 国立教育政策研究所「平成29年度全国学力・学習状況調査報告書【中学校/数学】」, 2018
- 国立教育政策研究所「平成29年度全国・学力学習状況調査の結果(概要)」, 2018
- 文部科学省「新学習指導要領(平成29年3月公示) 中学校学習指導要領」, 2018