

a^n の数列の下二桁の数の規則性

Some properties of the sequence of numbers $\{a^n\}$

四方 美妃, 吉岡 瞭吾, 松野 敦宏, 成川 公昭, 宮口 智成, 金児 正史

SHIKATA Miki, YOSHIOKA Ryogo, MATSUNO Atsuhiko,
NARUKAWA Kimiaki, MIYAGUCHI Tomoshige and KANEKO Masafumi

鳴門教育大学学校教育研究紀要

第35号

Bulletin of Center for Collaboration in Community
Naruto University of Education
No.35, Feb, 2021

a^n の数列の下二桁の数の規則性Some properties of the sequence of numbers $\{a^n\}$

四方 美妃*, 吉岡 瞭吾**, 松野 敦宏***,
成川 公昭****, 宮口 智成****, 金児 正史****

*〒770-0804 徳島市中吉野町1-31番地 鳴門教育大学附属中学校3年

**〒770-0853 徳島市中徳島町1-5番地 城東高等学校1年

***〒771-1153 徳島市応神町吉成字中ノ瀬40-6番地 徳島北高等学校2年

****〒772-8502 鳴門市鳴門町高島字中島748番地 鳴門教育大学

SHIKATA Miki*, YOSHIOKA Ryogo**, MATSUNO Atsuhiro***,

NARUKAWA Kimiaki****, MIYAGUCHI Tomoshige****, KANEKO Masafumi****

*Naruto University of Education Attached Lower Secondary School (student)

1-31 Naka-Yoshino-cho, Tokushima-shi, 770-0804, Japan

**Joto High school (student)

1-5, Naka-Tokushima-cho, Tokushima-shi, 770-0853, Japan

***Tokushima Kita High school (student)

40-6, Aza-Nakanose, Yoshinari, Uujin-cho, Tokushima-shi, 771-1153, Japan

****Naruto University of Education

748 Nakajima, Takashima, Naruto-cho, Naruto-shi, 772-8502, Japan

抄録：本論文は，鳴門教育大学が採択された「徳島県高等教育機関連携型『ジュニアドクター発掘・養成講座』～社会を牽引する未来の科学技術者を徳島から育てよう～」に応募し，2年目に数学コースを選択した受講生対象の講座での学習を通して得られた結果について述べたものである。筆頭著者，第2著者，第3著者は 2^n の数列の下二桁の数の規則性を見出し，その数学的な証明を与え，更にその結果の一般化を行った。特にサイエンスカンファレンスのポスターセッションにおける質問を動機として，一般の自然数 a により与えられる数列 a^n の一般の p 進法の表記に対する規則性にまで拡張した。

キーワード：科学技術振興機構 (JST)，ジュニアドクター育成塾， a^n の数列の下二桁の数

Abstract：In the lecture of mathematics course of the *Junior Doctor Program* of Naruto University of Education, the lead author, the second author and the third author studied a sequence of numbers 2^n , and found the regularity property in the last two digits of these numbers. Thanks to comments received in the poster session of the *Science Conference 2018*, we found another two properties of the sequences; 1) one property, which is similar to the one found for the sequence 2^n , holds for $a^n (n \geq 2)$; 2) the other property, which is also similar to the one found for the sequence 2^n , holds for $a^n (n \geq 2)$ of p -positional notation. This paper describes the proofs of three properties of the sequences.

Keywords：Japan Science and Technology Agency (JST), *Junior Doctor Program*, two columns of bottoms of a^n

I. はじめに

鳴門教育大学は，学習者の知的好奇心を深め，科学的・技術的な思考力や科学技術力を育てる教育を重視したモデル科学実験プログラムの開発と実践的検証を推進しており，平成29年度には，国立研究開発法人科学技術振興機構（以下，JST）が公募した「ジュニアドクター育

成塾」に応募し，「徳島県高等教育機関連携型『ジュニアドクター発掘・養成講座』～社会を牽引する未来の科学技術者を徳島から育てよう～」として採択された。

本研究は，鳴門教育大学のジュニアドクター養成塾の受講生で数学コースを選択した筆頭著者，第2著者，第3著者（以下，受講生）が，講義を通して見出した性質やその証明について，時系列に沿って示すものである。

受講生は、 2^n の下二桁の数列から見出した性質を数学的に証明し、ジュニアドクター養成塾サイエンスカンファレンス2018（2018年11月10日東京都江東区テレコムセンターにて開催）のポスターセッションで発表した（資料1）。そこで受けた質問を基に研究を進め、 $a^n (n \geq 2)$ の下二桁の数列でも同様の性質が成り立つこと、また十進法以外の進法表記の $a^n (n \geq 2)$ の下二桁の数列でも同様の性質が成り立つことを発見し、それらの性質の数学的証明を与えた。

II. 研究のきっかけ

「徳島県高等教育機関連携型『ジュニアドクター発掘・養成講座』～社会を牽引する未来の科学技術者を徳島から育てよう～」の数学コースにて、第5著者が提示した 2^{1000} の下二桁の周期についての問題を解いた際に、受講生が 2^n の下二桁の数について図2に示す規則性を見出した。それは、 2^n の下二桁の数を8個ずつ並べた場合、「連続する任意の2数をとると、前の数の1の位の数を決る後ろの数の十の位に加えた数の和の下二桁が、後ろの数の直下の数に一致する」というものである。帰納的に確認したところ、この規則性は正しそうだということがわかったため、この規則性が成り立つことを確かめる研究を始めた。

III. 数列 2^n の下二桁の数の規則性

この章では、最初に見出した、 2^n の下二桁に関して得られた結果と、その証明を与える。

$2^n (n = 1, 2, 3, \dots)$ の数列 $2^1, 2^2, 2^3, \dots$ を途中まで書き出したものが図1である。

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768, 65536, 131072, 262144, 524288, 1048576, 2097152, 4194304, …

図1 2^n の数列

図1をもとに 2^n の下二桁の数を並べると図1'が得られる。

02, 04, 08, 16, 32, 64, 28, 56, 12, 24, 48, 96, 92, 84, 68, 36, 72, 44, 88, 76, 52, 04, …

図1' 2^n の数列の下二桁の数

このとき、 $2^n (n = 1, 2, 3, \dots)$ の下二桁の数を8個ずつ並べると、図2のように「連続する任意の2数をとると、前の数の一の位の数を決る後ろの数の十の位に加えた数の下二桁が、後ろの数の直下の数に一致する」と

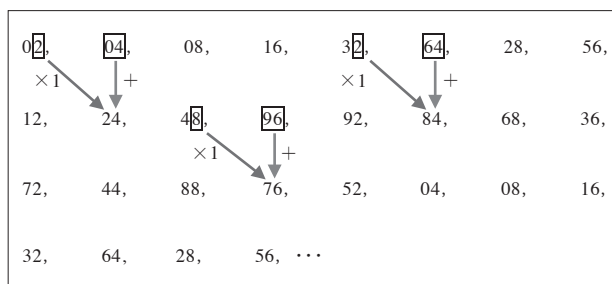


図2 2^n の数列の下二桁の数を8個ずつ並べた図

いう規則性が成り立っている。

即ち、以下の命題が成り立つ。

命題

$2^n (n = 1, 2, 3, \dots)$ の下二桁の数を8個ずつ並べる。このとき、連続する任意の2数をとると、前の数の一の位の数を決る後ろの数の十の位に加えた数の下二桁が、後ろの数の直下の数に一致する。

証明

連続する任意の2数のうち、前の数を 2^ℓ と表す。このとき後ろの数は $2^{(\ell+1)}$ 、後ろの数の直下の数は $2^{(\ell+9)}$ と表すことができる。

従って式

$$2^\ell \times 10 + 2^{(\ell+1)} \equiv 2^{(\ell+9)} \pmod{100} \dots (1)$$

を示せば、命題が証明されたことになる。

式(1)のすべての項が、 $2^{(\ell+1)}$ の因数を持つように変形すると、

$$2^{(\ell+1)} \times 5 + 2^{(\ell+1)} \equiv 2^{(\ell+1+8)} \pmod{100}$$

すなわち、

$$(5+1) \times 2^{(\ell+1)} \equiv 2^8 \times 2^{(\ell+1)} \pmod{100}$$

よって、式(1)は以下の式(2)と同値である。

$$6 \times 2^{(\ell+1)} \equiv 256 \times 2^{(\ell+1)} \pmod{100} \dots (2)$$

ゆえに、命題を示すためには式(2)が成り立つことを示せばよい。

ここで、

$$\begin{aligned} 256 \times 2^{(\ell+1)} - 6 \times 2^{(\ell+1)} &= (256 - 6) \times 2^{(\ell+1)} \\ &= 500 \times 2^\ell \end{aligned}$$

より、 $256 \times 2^{(\ell+1)} - 6 \times 2^{(\ell+1)}$ は、100の倍数である。

すなわち、式(2)が正しいことがわかった。

よって、命題は成り立つ。□

IV. 数列 a^n の下二桁の数の規則性

先述の命題で得られた 2^n の下二桁の数の規則性が、2以外の数でも見られるかを確かめるため、数列 3^n に

¹ここで、 $a \equiv b \pmod{100}$ は、 a を100で割った時の余りと b を100で割った時の余りが等しいことを表す。

ついて考察する。3ⁿの下二桁の数は、図3に示す。

03, 09, 27, 81, 43, 29, 87, 61, 83, 49, 47, 41,
23, 69, 07, 21, 63, 89, . . .

図3 3ⁿの数列の下二桁の数

この数列では、次に示す3つの事柄が成り立つことが推測された。

① 3ⁿ (n=1, 2, 3, . . .) の下二桁の数を図4のように12個ずつ並べたとき、連続する任意の2数をとると、前の数の一の位の数の2倍を後ろの数の十の位に加えた数の下二桁は、後ろの数の直下の数に一致する (図4)。

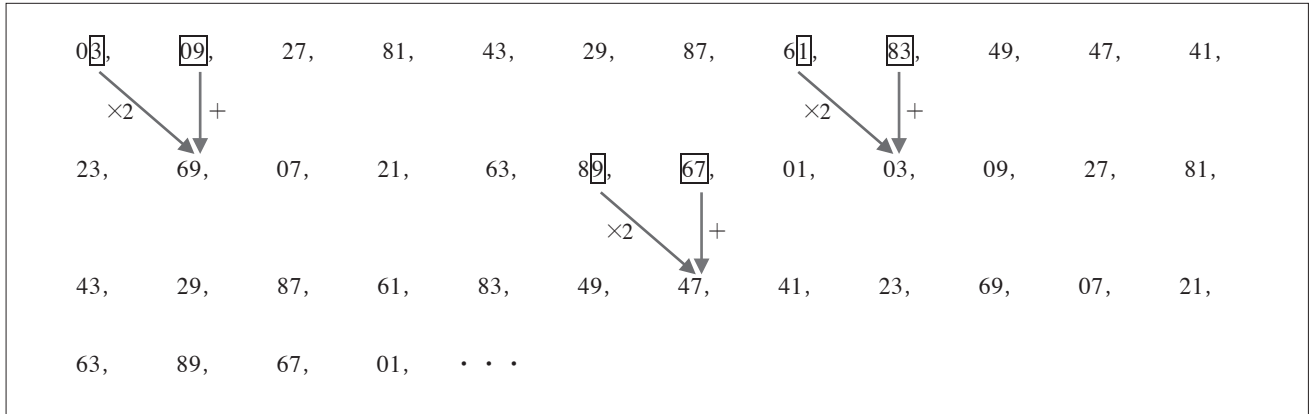


図4 3ⁿの数列の下二桁の数を12個ずつ並べた図

② 3ⁿ (n=1, 2, 3, . . .) の下二桁の数を図5のように8個ずつ並べたとき、連続する任意の2数をとると、

前の数の一の位の数の8倍を後ろの数の十の位に加えた数の下二桁は、後ろの数の直下の数に一致する (図5)。

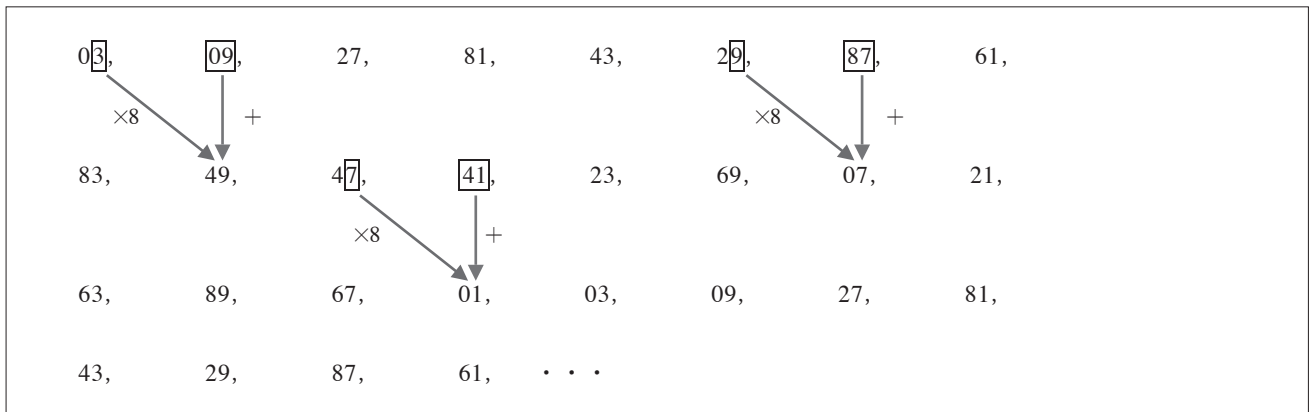


図5 3ⁿの数列の下二桁の数を8個ずつ並べた図

③ 3ⁿ (n=1, 2, 3, . . .) の下二桁の数を図6のように4個ずつ並べたとき、連続する任意の2数をとると、

前の数の一の位の数の4倍を後ろの数の十の位に加えた数の下二桁は、後ろの数の直下の数に一致する (図6)。

以上の例を、一般の一桁の自然数 a の冪 (べき) による数列 aⁿ に対しまとめると、以下の定理1が得られる。

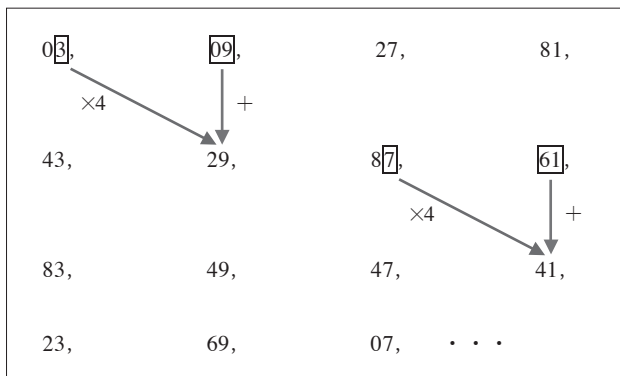


図6 3ⁿの数列の下二桁の数を4個ずつ並べた図

定理1 aを一桁の自然数, k (≥ 2) を a^k の一の位と aが一致する自然数, r を a^k の十の位とする。

このとき,

$$m = \begin{cases} \text{偶数} & a = 5 \text{ のとき} \\ r + 10j \ (j \in \mathbb{Z}) & a = 1, 3, 7, 9 \text{ のとき} \\ r + 5j \ (j \in \mathbb{Z}) & a = 2, 4, 6, 8 \text{ のとき} \end{cases}$$

に対し、またその時の m に限り、次の性質(*)が成り立つ。

性質(*)

a^n ($n=1, 2, 3, \dots$) の下二桁の数を $k-1$ 個ずつ並べる。このとき、連続する任意の2数をとると、前の数の一の位の数の m 倍を後ろの数の十の位に加えた数の下二桁は、後ろの数の直下の数に一致する。

証明

(1) $a=5$ のとき

a^n ($n \geq 2$) の下二桁は常に25だから k は2以上の任意の自然数。このとき、偶数 m 、またそれに対してのみ、性質(*)が成り立つことは明らかである。

以下、 $a \neq 5$ とする。

性質(*)を式で表せば

$$a^n \times 10 \times m + a^{n+1} \equiv a^{n+k} \pmod{100} \dots (3)$$

即ち

$$a^n (a^k - 10m - a) \equiv 0 \pmod{100} \dots (4)$$

よって性質(*)は、 $a^n (a^k - 10m - a)$ が100の倍数となることと同値である。

(2) $a=1, 3, 7, 9$ のとき

$100=2^2 \times 5^2$ であり、 a^n には因数2, 5が含まれていないから、式(4)より、 $a^k - 10m - a$ が100の倍数となる。

すなわち、

$$a^k \equiv 10m + a \pmod{100}$$

このことは、性質(*)が成り立つためには、 a^k の一の位が a に等しく、 a^k の十の位が $m=r+10j$ ($j \in \mathbb{Z}$) を満たすときであり、その時に限ること、を意味する。

(3) $a=2, 4, 6, 8$ のとき

a は5を因数に含んでいないので、 $a^n (a^k - 10m - a)$ が100の倍数となるためには、 $a^k - 10m - a$ は25の倍数でなければならない。また、 $a^k - 10m - a$ は偶数であるから、このとき $a^k - 10m - a$ は50の倍数である。

逆に、 $a^k - 10m - a$ が50の倍数であるならば、

$$a^n (a^k - 10m - a) \text{ は } 100 \text{ の倍数である。}$$

即ち $a^k - 10m - a$ が50の倍数のとき、その時に限り、

$$a^n (a^k - 10m - a) \text{ が } 100 \text{ の倍数になる。}$$

従って、式(3)は $a^k \equiv 10m + a \pmod{50}$ と同値である。このことは、性質(*)が成り立つためには、 a^k の一の位が a に等しく、 a^k の十の位が $m=r+5j$ ($j \in \mathbb{Z}$) を満たすときであり、その時に限ることを示している。 □

(注意)

$0 \leq m \leq 9$ とすると、 m は、 a が5以外の奇数の時た

だ一つに決まり、 a が偶数の時2つ存在する。

(例)

$a=3$ のとき

3, 9, 27, 81, $\boxed{43}$, 29, 87, 61, $\boxed{83}$, 49, 47, 41, $\boxed{23}$, \dots

一の位が3に等しいのは 43 ($k=5$), 83 ($k=9$), 23 ($k=13$) であるから、 $0 \leq m \leq 9$ とすると、

$k=5$ のとき $r=4, m=4$

$k=9$ のとき $r=8, m=8$

$k=13$ のとき $r=2, m=2$

\dots

$a=4$ のとき

4, 16, $\boxed{64}$, 56, $\boxed{24}$, 96, $\boxed{84}$, 36, $\boxed{44}$, \dots

一の位が4に等しいのは 64 ($k=3$), 24 ($k=5$), 84 ($k=7$) であるから、 $0 \leq m \leq 9$ とすると、

$k=3$ のとき $r=6, m=6, 1$

$k=5$ のとき $r=2, m=2, 7$

$k=7$ のとき $r=8, m=8, 3$

\dots

$a=6$ のとき

6, $\boxed{36}$, $\boxed{16}$, $\boxed{96}$, $\boxed{76}$, \dots

全ての一の位が6に等しい。従って $0 \leq m \leq 9$ とすると、

$k=2$ のとき $r=3, m=3, 8$

$k=3$ のとき $r=1, m=1, 6$

$k=4$ のとき $r=9, m=9, 4$

\dots

$a=7$ のとき

7, 49, 43, 01, $\boxed{07}$, 49, \dots

より

$k=5$ のとき $r=0, m=0$

$k=10$ のとき $r=0, m=0$

\dots

V. 数列 a^n の p 進法表記による下二桁の数の規則性

第IV章では9以下の自然数 a に対し、数列 a^n を10進法で表記したときの規則性に対する結果を述べたが、この結果について a を2以上とし、 p 進法表記した場合に拡張して考える。

なお、これ以降に使用する「下二桁」は p 進法表記したときの下から二桁までの数を指すものとする。また、 p 進法表記した時の下二桁目を「 p の位」と呼ぶ。

定理2 a, p を2以上の2つの自然数, それらの最大公約数を ℓ , $p=ql$ としたとき, q と ℓ が互いに素とする。また, p 進法表記において, a^n と a の一の位が一致する $n (\geq 2)$ を k とし, r を $a^k - a$ の p の位の値とする。このとき, $m = r + jq$ ($j \in \mathbb{Z}$) に対して, またその m に対してのみ, 次の性質(**) が成り立つ。

性質 ()**

a^n ($n = 1, 2, 3, \dots$) の下二桁の数を $k-1$ 個ずつ並べる。このとき, 連続する任意の2数をとると, 前の数の一の位の数の m 倍を後ろの数の p の位に加えた数の下二桁は, 後ろの数の直下の数に一致する。

証明

$(a, p) = \ell$ とし, $a = b\ell$, $p = q\ell$ とする²。仮定より $(q, \ell) = 1$ であるから, $(a, q) = (b, q) = 1$ である。

性質(**)を式で表すと,

$$a^n \times p \times m + a^{n+1} \equiv a^{n+k} \pmod{p^2 = q^2 \ell^2}$$

すなわち

$$a^n (a^k - pm - a) \equiv 0 \pmod{p^2 = q^2 \ell^2} \tag{1}$$

等式(1)が成り立つとすると, $(a, q) = 1$ より

$$a^k - pm - a \equiv 0 \pmod{q^2} \tag{2}$$

逆に(2)が成り立つとすると,

$$a^k - a - pm = b^k \ell^k - b\ell - q\ell m$$

であるから,

$$a^k - a - pm \equiv 0 \pmod{\ell}$$

したがって(2)および $(q, \ell) = 1$ より

$$a^k - a - pm \equiv 0 \pmod{\ell q^2}$$

ℓ は a の因数であるから,

$$a^n (a^k - pm - a) \equiv 0 \pmod{p^2 = q^2 \ell^2}$$

すなわち, (1)が成り立つことと, (2)が成り立つことは同値である。

a^k と a は一桁目が一致し, $a^k - a$ の p の位の値が r であるから, $a^k - a \equiv rp \pmod{p^2}$

したがって, $m = r + jq$ ($j \in \mathbb{Z}$) とすると,

$$a^k - pm - a \equiv rp - p(r + jq) \equiv -jq \pmod{q^2}$$

ここで, $p = q\ell$ に注意すると,

$$a^k - a - pm \equiv 0 \pmod{q^2} \text{ となり, 式(2)がなりたち,}$$

性質(**)が成立する。

逆に式(2)が成り立つとする。 $a^k - a \equiv rp \pmod{p^2}$ であるから, $a^k - a \equiv rp \pmod{q^2}$

したがって, 式(2)より,

$$rp - mp \equiv 0 \pmod{q^2}$$

すなわち,

$$rql - mql \equiv 0 \pmod{q^2}$$

仮定 $(q, \ell) = 1$ より, $r - m \equiv 0 \pmod{q}$ となり, $m = r + jq$ ($j \in \mathbb{Z}$) でなければならない。□

VI. おわりに

鳴門教育大学は, 学習者の知的好奇心を深め, 科学的・技術的な思考力や科学技術力を育てる教育を重視したモデル科学実験プログラムの開発と実践的検証を推進し, 特に, 理数・技術(情報)領域に意欲と才能を有する小・中学生に対して, その能力を伸長するプログラムを体系的に提供する「科学・技術者の発掘・養成講座」を継続実施してきた。このような背景のもと, 平成29年度から始まった「徳島県高等教育機関連携型『ジュニアドクター発掘・養成講座』～社会を牽引する未来の科学技術者を徳島から育てよう～」に応募してきた受講生は, 1年次には理数全般の学習をし, 2年次には興味を持つ単元を希望して学習してきている。本研究は2年次の数学コースでの学習の成果である。

数学に興味を持ち, 一見では何の変哲もない数列に, 思わぬ性質を見出し, それを数学的に証明できたことを通して, 証明の有用性を知ることができ, 見出した性質をより一般的にとらえてみる力も身につけることができた。本研究を通して学んだ経験は, 今後の私たちが, 科学的探究を積み重ねていく上での重要な素地として生かされていけらうと感じている。多くの学びを得ることができた, 鳴門教育大学でのジュニアドクターのプロジェクトに, 感謝している。

謝辞

本研究は, 科学技術振興機構(JST)の「ジュニアドクター育成塾」(徳島県高等教育機関連携型ジュニアドクター発掘・養成講座)の助成を受けて行われました。ここに深謝申し上げます。

参考資料

科学技術振興機構(2018), サイエンスカンファレンス2018エントリーシート No. 1, p. 21.
 科学技術振興機構(2018), サイエンスカンファレンス2018エントリーシート No. 2, p. 39-40.
 四方美妃, 松野敦宏(2018), 自然数 2^n の下二桁の数の規則性とその証明, サイエンスカンファレンス2018発表ポスター(資料1).

² 2つの整数 a と b に対し, (a, b) はそれらの最大公約数を表す。

自然数 2^n の下二桁の数の規則性とその証明

四方 美妃 松野 敦宏

① 2^n の下二桁の数の規則性の表

< 2^n >

01	02	04	08	16	32	64	28	56
12	24	48	96	92	84	68	36	
72	44	88	76	52	04	08	16	
32	64	28	56	12	24	48	96	
.....								

・下二桁の数の並びを見ているうちに、8個ずつ並べ替えると、何処で調べても、ある下二桁の数はななめ左上の数の10倍と、ななめ右上の数の和に等しくなることに気づいた。

・同様の規則性が 3^n や 4^n にないか調べると、同様の規則性を発見した。

< 3^n >

01	03	09	27	81	43	29	87	61	83	49	47	41
23	69	07	21	63	89	67	01	03	09	27	81	
43	29	87	61	83	49	47	41	23	69	07	21	

(例) $63 \times 20 + 89 \equiv 49 \pmod{100}$

・表をつくらなくても、 $2^k (k \geq 9)$ の下二桁の数について、連続する $2^{(k-9)}$ と $2^{(k-8)}$ と 2^k の關係に注目すればよいことに気づいた。

・次に示す命題を証明することにした。

・標準コースで学習した合同式が活用できることに気づいた。

② 2^n の下二桁の数の規則性の証明

命題 $2^n (n \geq 0)$ の数列において、 $2^k (k \geq 9)$ の下二桁は、 2^k の9つ前の数の一の位を10倍したものと 2^k の8つ前の数との和の下二桁の数に等しくなる。

証明

命題を数式に表すと、

$$2^{(k-9)} \times 10 + 2^{(k-8)} \equiv 2^k \pmod{100}$$

どの項も $2^{(k-8)}$ の因数を持つように式変形すると

$$\therefore 6 \times 2^{(k-8)} \equiv 256 \times 2^{(k-8)} \pmod{100}$$

$$\therefore 6 \times 2^{(k-8)} \equiv 256 \times 2^{(k-8)} \text{ が成り立つことを示せばよい。}$$

そこで、 $256 \times 2^{(k-8)} - 6 \times 2^{(k-8)}$ が、100の倍数になっていることを確かめる。

$$256 \times 2^{(k-8)} - 6 \times 2^{(k-8)} = (256-6) \times 2^{(k-8)} = 500 \times 2^{(k-9)}$$

$$\therefore 6 \times 2^{(k-8)} \equiv 256 \times 2^{(k-8)} \text{ が正しいことが証明された。}$$

③ a^n の下二桁の数の規則性の問題(②の一般化)

問題 自然数 $a (1 \leq a \leq 9)$ に対し、数列 a^n の k 個前の一の位の $m \times 10$ 倍 ($1 \leq m \leq 9$)と $k-1$ 個前の数の和の下二桁は、常に a^n の下二桁と一致する。このときの k と m を求めよ。

解答

$a = 5$ の時は、 a^n の下二桁は常に25だから、 m を偶数として、法則は明らかである。以下 $a \neq 5$ とする。

条件を式で表せば、

$$a^{n-k} \times 10 \times m + a^{n-k+1} \equiv a^n \pmod{100}$$

より

$$a^{n-k} (a^k - 10m - a) \equiv 0 \pmod{100}$$

すなわち、 $a^{n-k} (a^k - 10m - a)$ が100の倍数となるための自然数の組 (k, m) を求めるとよい。

(i) $a (\neq 5)$ が奇数のとき： $100 = 2^2 \times 5^2$ である。 a^{n-k} には因数2, 5が含まれていないから、 $a^k - 10m - a$ が100の倍数となる。

すなわち、

a^k の一の位が a に等しい k であり、その時の a^k の十の位が m である。

(ii) $a (\neq 5)$ が偶数のとき： $a^{n-k} (a^k - 10m - a)$ が100の倍数となるためには、 $a^k - 10m - a$ が25の倍数でなければならない。また、 $a^k - 10m - a$ は偶数であるから、 $a^k - 10m - a$ は50の倍数である。 $n \geq k+1$ より、 a^{n-k} は偶数である。

したがって、 $a^k - 10m - a$ が50の倍数のとき、 $a^{n-k} (a^k - 10m - a)$ が100の倍数になる。

以上より、

a^k の一の位が a に等しい k であり、その時の a^k の十の位または十の位に5を加えたときの一の位が m である。

したがって、長さ k は a^n の一の位の周期ごとに出てくる。(解答終わり)

例 $a = 3$ のとき、01, 03, 09, 27, 81, 43, 29, 87, 61, 83, 49, 47, 41, 23, ... より、

$$k = 5 \quad \text{このとき} \quad m = 4$$

$$k = 9 \quad \text{このとき} \quad m = 8$$

$$k = 13 \quad \text{このとき} \quad m = 2$$

...