鳴門教育大学授業実践研究
－授業改善をめざして－
第 21 号　2022

数学的活動における数学化及び活用・意味づけの資質・能力を育成する授業の一方策

―教科書の問題を作り替える活動を通して―

矢田　耕資[1)]，金児　正史[2)]，佐伯　昭彦[3)]

（キーワード：数学的活動，数学化，数学的結果の解釈・検討）

1　問題の所在

徳島県立普通科高等学校の数学教師である筆頭者は，教科書の内容を説明しながら板書するだけの授業を多く行ってきた。また，授業中の生徒への発問も，思考を深めるようなものではなく，短答式の問いかけばかりが多くなっていた。生徒にしてみれば，板書された内容をノートに書き写すだけの作業的な学習になり，授業中の活動も教師が指示した教科書の問題を解くだけの，知識や技能の反復練習になりがちで，教科書の問題を解けるようになることが大きな目標になっていた。その要因を考えてみると，筆頭者が，上級学校への進学希望生徒や保護者に対応する必要から，基本的な知識・技能を身に付けることを先行させるべきだという考えに偏っていたことがあげられる。また，これまでの知識を覚え込ませる授業形態を変更することへの不安もあった。さらに，校務分掌や放課後，休日の部活指導などの多忙による教材研究不足も原因である。しかし，こうした知識偏重の授業のままでは，生徒の生きる力が十分に育たないのではないか，との漠然とした思いを持ち続けていた。そこで，筆頭者のこれまでの授業を改めて振り返ってみた。その結果，生徒が主体性を持ち，他者と対話し，協働しながら学ぶことはほぼできていなかったことが明らかになった。

清水ら（2010）は，「教師からの一方的な説明，ドリル，型にはまっていて現実味のない文章題を中心とした受動的な学習活動で身につけた能力は，動的で複雑な現実の問題解決の脈絡ではほとんど役立たないことになる危険があると考えられる（p.31）」と述べている。筆頭者はこの主張に強い影響を受けた。知識偏重の授業を継続していくだけでは，生徒が知識を活用する能力や，新たな課題に取り組むような力量は身につけられないため，筆頭者の授業改善の必要性を感じていたからである。2022年度から実施される次期高等学校学習指導要領を見れば，生徒が主体的に課題を解決していく能力の育成が求められ，共通テストでも教科書で取り扱われていない思考力を問う問題への対応を求めるようになってきている事実もある。そこで筆頭者は，これまでの授業を改善し，令和４年度から実施される高等学校学習指導要領数学科の目標である「数学的な見方・考え方を働かせ，数学的活動を通して，数学的に考える資質・能力を育成することを目指す（p.23）」（以下，高等学校数学科の目標）という授業を具現化するための構想を試みることにし，清水らの主張にも応えたいと考えた。

2　授業改善に至る過程

高等学校学習指導要領（平成 30 年）解説数学編理数編（文部科学省，2019）（以下，学習指導要領解説）を参考に，高等学校数学科の目標を吟味した。特に，目標に記載されている「数学的活動」の定義「事象を数理的に捉え，数学の問題を見いだし，問題を自立的，協働的に解決する過程を遂行すること（p.25）」に着目した。筆頭者のこれまでの授業実践で最も不足している部分だと認識したからである。そこで，本研究では，これまでの授業を改善し，数学的活動を重視した，生徒が主体的に活動できるような授業を構想することにした。

学習指導要領解説に基づくと，数学的活動について「数学的活動として捉える問題発見・解決の過程には，主として二つの過程を考えることができる。一つは，日常生活や社会の事象などを数理的に捉え，数学的に表現・処理し，問題を解決し，解決過程を振り返り得られた結果の意味を考察する過程であり，もう一つは，数学の事象から問題を見いだし，数学的な推論などによって問題を解決し，解決の過程や結果を振り返って統合的・発展的，体系的に考察する過程である（p.25）」と定義している。また，平成 28 年 12 月の中央教育審議会答申で示された，数学的活動は，算数・数学の学習過程のイメージ（図 1；

[1)] 鳴門教育大学大学院　学習指導力開発コース
[2)] 鳴門教育大学　高度学校教育実践専攻（教職系）
[3)] 鳴門教育大学　高度学校教育実践専攻（教科系）

(p.26)）の模式図で提示している。数学的活動の１つ目の過程が図１中の左側の【現実の世界】の部分を含む過程（以下，*左側の過程*），２つ目の過程が右側の【数学の世界】に含まれる過程（以下，*右側の過程*）である。

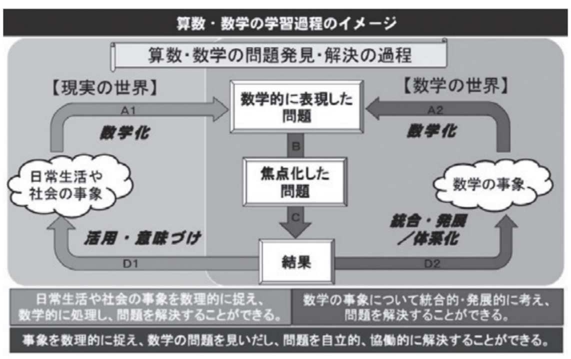


図１　算数・数学の学習過程のイメージ

本研究を通して，特に*左側の過程*を取り入れた授業を考えることにした。これまでの授業では，*右側の過程*の数学を統合・発展することはあったが，*左側の過程*の日常生活や社会の事象を数理的に捉えることは殆どしていないと気づいたからである。また，学習指導要領解説から*右側の過程*は，*左側の過程*があってこそ，その深みを増すものだと考えたからである。

学習指導要領解説は，図１に記載されている*左側の過程*の「A1 数学化」，「D1 活用・意味づけ」を，以下のように定義している。A1 数学化とは「現実世界の事象を考察する際に，目的に応じて必要な観点をもち，その観点から事象を理想化したり抽象化したりして，事象を数量や図形及びそれらの関係などに着目して数学の舞台にのせて考察しようとすること（p.25)」，D1 活用・意味づけとは「得られた結果を解釈したり，類似の事象にも活用したりして適用範囲を広げる（p.26)」である。これらは，生徒に大きく不足している経験の一つだと考える。これらを含む，*左側の過程*を取り入れた授業を実現できれば，生徒が知識を活用する能力や，新たな課題に取り組むような力量を身に付けることができると考えた。

そして何より，*左側の過程*を取り入れた授業を実現できれば，清水ら（2010）の主張にも応えられると直観した。そこで本研究では，数学的活動を重視した授業として，*左側の過程*を取り入れた授業を構想することにした。

3　本授業の目標

２節で示した高等学校数学科の目標を達成するための，*左側の過程*を取り入れた本授業の目標を次のように設定した。

> 本授業の目標
> 教科書の問題を起点にして，日常生活の場面に立ち返って改めて問題を作成し，その問題を解決する活動を通して，日常生活や社会の事象から，数学的に表現した問題へ，数学化するとともに，数学的結果を解釈・検討する資質・能力を育成する。

本授業の目標の，「教科書の問題を起点にして，日常生活の場面（図１の現実の世界の具象化）に立ち返って改めて問題を作成し，その問題を解決する活動」について，以下の３つの場面を想定して構想した。それらの場面は，教科書の問題から日常生活の事象に立ち返る場面（図２の㋐；以下，「日常的事象に立ち返る場面」），日常生活の事象から数学化する場面（図２の㋑；以下，「数学化する場面」），作成した問題を解決して数学的結果を活用・意味づけする場面（図２の㋒；以下，「数学的問題の解決と結果の解釈・検討場面」）（本研究において，活用・意味づけと解釈・検討は同義とする。）である。生徒の実態を見ると，これまでの学習経験の中で，日常生活や社会の事象を数学化して数学的に表現した問題を作る経験がないだけでなく，数学的結果を日常生活や社会の事象と照らし合わせて解釈・検討する経験もない。こうした状況の生徒が，数学化しやすくする機会を設ける目的で，筆者らは，「日常的事象に立ち返る場面」を設定した。生徒が「数学化する場面」で，「日常的事象に立ち返る場面」の起点とした教科書の問題を参考にすれば，数学的に表現した問題を作りやすくなるだろうと考えたからである。またそれだけでなく，「日常的事象に立ち返る場面」を設けることで，「数学的結果の解決と結果の解釈・検討場面」の必然性も生み出しやすくなると考えたからである。このような授業を構想することによって，筆者らは，日常生活や社会の事象から，数学的に表現した問題へ，数学化するとともに，数学的結果を解釈・検討する資質・能力を育成することができると考えた。

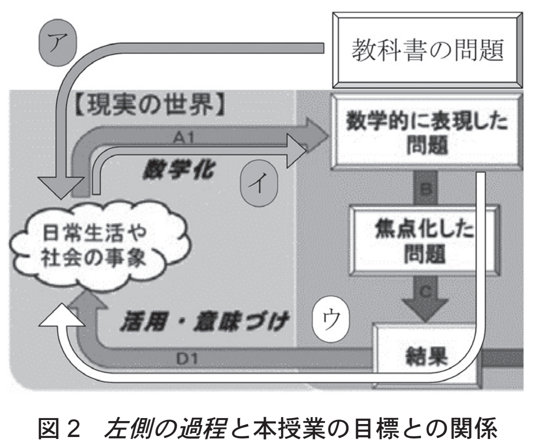


図２　*左側の過程*と本授業の目標との関係

4　本授業の概要

本授業の実施時期，対象生徒は以下の通りである。

実施時期　2020年2月20日㈭　6・7限（50分×2）
対象生徒　徳島県A高等学校普通科　1年　35人

本授業の目標を達成するために，「日常的事象に立ち返る場面」の起点となる教科書の問題を，数学Ⅰと数学Aの教科書や副教材から選定した。その結果，副教材から選定した問題は，整数の性質の単元にある問題（以下，原問題）である（図3)。

縦180cm，横315cmの長方形の床に，1辺の長さ$a$cmの正方形のタイルを何枚か敷き詰めて，すき間がないようにしたい。タイルをできるだけ大きくするには，aの値をいくらにすればよいか。ただし，aは整数とする。

図3　本授業で選定した原問題
（改訂版短期完成整数の性質ノート）

原問題はタイルを敷き詰めるという日常生活や社会の事象を含んでおり，タイルが敷き詰められた場所は置籍校にも多くある。そのため，生徒は原問題を起点にして，日常生活や社会の事象に立ち返りやすいと考えた。こうした理由から，生徒が数学化して問題を作る経験をするのに適した問題であるとして，原問題を選定した。

授業展開の概要を,「日常的事象に立ち返る場面」,「数学化する場面」,「数学的問題の解決と結果の解釈・検討場面」の3つの場面に沿って示す。

日常的事象に立ち返る場面

原問題（図3）を提示し，その解法には最大公約数を用いたことを確認する。次に，本時の課題が『みんながタイル職人になったつもりで，タイルを張って校内のリフォームを考えるために，数学を用いて解決しよう！』であることを伝え，1班3～4人の9班に生徒を分ける。そして，ワークシートを配布し，リフォームしたい場所を各班で考えるように指示する。その後，各班で決めたリフォームしたい場所に移動し，原問題を作り替えるために必要な値や様子を記録してくるように指示する（図4)。その際に，筆頭者が準備したものさしやメジャーを必要に応じて使用するように指示する。

現実の場面を見たり，調べたりしてどのようなことがわかりましたか？

図4　データの収集の指示

数学化する場面

収集したデータをもとに原問題を作り替えるように指示する（図5)。その際に，リフォームしたい場所を再度調査してきてもかまわないことや，原問題に固執せずに自由に作り替えてよいことを，伝える。作業中には，生徒が原問題の作り替えに行き詰まることが予想されるため，各班を回り作業の進捗状況を確認する。

作り替えた問題を書きましょう。

図5　原問題の作り替えの指示

数学的問題の解決と結果の解釈・検討場面

作り替えた問題の解を求めるとともに，その問題の解がどんな意味をもつのか，解からわかることや気づいたことについても記録するように指示する（図6)。

①作り替えた問題を解きましょう。
②問題を解いて出てきた答えから，どのようなことが考えられますか。

図6　解決と結果の解釈・検討の指示

2時間目の始めに，各班に発表用ホワイトシートとホワイトボードマーカーを配布し，作り替えた問題，解答，解からわかったこと，をホワイトシートにまとめるように指示する。その後，A班から順番に発表用ホワイトシートを黒板に貼り，発表する。生徒には各班の発表を聞くだけでなく，各班が作り替えた問題で工夫している点や良いと思った点について記録するように指示する（図7①)。すべての班の発表の後，今回の授業を受けて原問題を作り替えるときに大切だと思ったことを振り返るように指示する（図7②)。

①各班の発表を聞いて，工夫している点や，良いと思った点を書きましょう。
②現実の問題を作り替えるときに大切だと思ったことは何ですか？

図7　感想と振り返りの指示

5　本授業の実際

本授業の実際を，3つの場面に沿って示す。

日常的事象に立ち返る場面

原問題（図3）を提示し，その解法を確認した。その後，普段の生活や校内でタイルを見たことがあるか，質問した。生徒からは「トイレで見た」とすぐに反応があった。次に，本時の課題『みんながタイル職人になったつもりで，タイルを張って校内のリフォームを考えるために，数学を用いて解決しよう！』を伝えた。そして，各班で

リフォームしたい場所を決めるように指示した。生徒は，楽しそうに話し合いをし始め，タイルを張ってリフォームしたい場所として「階段」「玄関」「トイレ」など，口々に話しているのが聞こえてきた。この後，その場所の調査を行うため，あまり遠くにならないように促した。各班がリフォームしたい場所を決めた後，その場所のデータを収集した。その際に，どんな広さの所に，どうやってタイルを張るのかを考え，原問題を作り替えるために必要な値や様子を記録してくるように指示した（図4）。生徒は，筆頭者が準備していたものさしやメジャーを使用し，校内の各場所に移動してデータを収集していた（図8）。生徒は，実際にタイルを張ることを想定し，原問題を作り替えるために必要になると思われる値を取捨選択しながら記録していた。

図８　Ｃ班の調査の様子

数学化する場面

収集したデータをもとに，原問題を自由に作り替えるように指示した（図5）。その際に，リフォームしたい場所を再度調査してもかまわないことを伝えた。生徒は，収集したデータをもとに，原問題の作り替えに精力的に取り組んでいた。いくつかの班で作業が行き詰まるのではないかと予想していたが，原問題を作り替えるために，どうしたらよいのかわからず，困っている班はなかった。各班では生徒１人ひとりが，自分の考えをしっかりと発言し，わからない生徒がいると，説明を補足しながら議論を進め，協働して原問題を作り替えていた。なお，原問題を作り替える作業中，生徒Ｍがタイルの形は正方形だけなのか，質問があった。筆頭者は，問題の作り替えの作業を一時中断して，事前に準備していた資料を使い，いろいろな形のタイルがあることや，タイルが張ってある様子の写真を，全員に提示した。現実のタイルの形やその張り方を，生徒が作り替える数学的問題の作成や，結果の解釈・検討の一助にしようとしたためである。

数学的問題の解決と結果の解釈・検討場面

作り替えた問題の解を求めたうえで，その問題の解がどんな意味をもつのか，考えるように指示した（図6）。その後，作り替えた問題，解答，解からわかったことの３つについて，２時間目に発表することを伝えたが，多くの班がまだ作り替えた問題を解決しておらず，生徒の作業は休み時間も続いていた。この段階では，ほとんどの生徒が，まだ図６の指示②に記述していなかった。２時間目が始まり，ホワイトシートにここまでの成果をまとめ，発表者も決めるように指示した。生徒は，協力して発表準備をしていた。発表準備が整った後，各班の発表を３分程度で行った。生徒は，他の班の発表を真剣に聞いていた。

発表では，各班が提示した作り替えた問題のうち，４班が図５の指示で検討した問題から変更していた。Ａ班は，渡り廊下の広さを縦1,955cm 横425cm から，班の生徒が両腕を広げた長さのいくつ分として，縦と横の長さの表現を，Ｂ班はタイルとタイルの隙間の目地（以下，タイルの目地）を考慮した問題に，Ｄ班はタイルの１辺を９cm として枚数を求める問題から，タイルの１辺の大きさ，枚数，金額を求める問題に，Ｆ班はタイルの枚数の上限を，それぞれ変更していた。中でもＢ班は，各班が作り替えた問題の解決に取り組んでいる最中に，実際にタイルが張られているトイレを調査したいと申し出たので，追加調査を認めた。Ｂ班の生徒Ｏは，図４の指示に，玄関の床にタイルを敷き詰めた図をかき（図９左上の図），縦と横の長さの最大公約数を求めていた（図９右上の計算）。図９左上の図には，タイルの目地の記述はなかった。ところが，図５の指示には，タイルの目地の幅を0.5cm とした図をかいていた（図９下の図）。さらにＢ班は，発表時のホワイトシートに，「タイルのまわりには，それぞれ0.5cm のすきまがあります」としていた（資料）。これらのことから，Ｂ班は，追加調査の前は，タイルの目地を考慮せずに問題を作成し解決していたが，追加調査の後に，タイルの目地を考慮した問題に，さらに作り替えていたことがわかる。

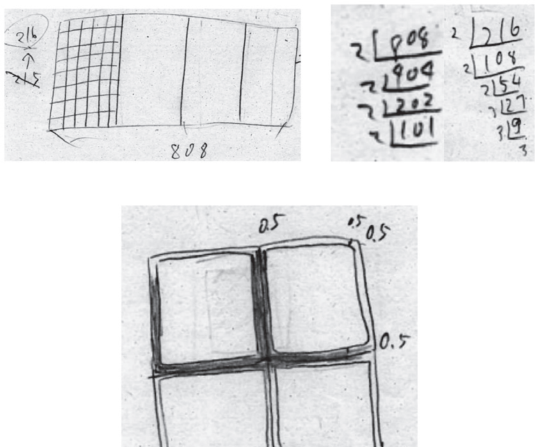


図９　Ｂ班の生徒Ｏの記述

発表ぎりぎりまで原問題の作り替えが行われていたこともあり，発表項目の３つ目である，解からわかったことを発表したのは５班だけだった。C 班は，リフォームには多くのタイルが必要になることを，D 班はリフォームには多額の費用がかかることを，E 班は身体の一部を使って長さを求めたことを，G 班はタイルの大きさから枚数がわかったことを，I 班は求めたタイルの大きさでは，タイルを切断しないと敷き詰められないことを，それぞれ発表した。各班が発表する際，生徒に，発表を聞く中で工夫している点や，良いと思った点を記入するように指示した（図７①）。35 人中 27 人が自分達の班以外の８班すべてに対し記入しており，白紙回答はなかった。このことから，発表を聞く姿と同様に，他の班の考え方を受容している様子がわかった。

最後に，各班の発表を聞いて気づいたことや，本授業を振り返って大切だと思ったことを記入するように指示した（図７②）。多くの生徒が，「日常的事象に立ち返る場面」で収集したデータでは計算がうまくいかず，数値の変更の必要があったと記入していた。その他にも，現実は複雑であること，リフォームの費用のこと，考えを文章化する難しさに関することを記入していた。追加調査を行った B 班の生徒 O は，タイルの目地に気づいたことを記入していた。また，解からわかったことを発表した I 班の生徒 O は，求めた解ではタイルを切断しなければ敷き詰められないことを記入していた。なお，生徒が発表したホワイトシートは，本稿末尾の資料に示す。

6　本授業の分析

本授業の分析を，３つの場面に沿って示す。分析には，本授業の生徒の活動や，ワークシートを利用した。

<u>日常的事象に立ち返る場面</u>

各班が決めたリフォームしたい場所の形状は複雑なために計測可能な箇所がたくさんある。例えば，A 班が決めた渡り廊下（図 10）は，段差を境にして手前と奥の床に分かれている。さらに，手前の床が傾斜しているため，左側の方が右側よりも段差が大きい。また，左右に手すりを支える低い壁もある。A 班は，たくさんある計測可能な箇所の中から，原問題を作り替えるために必要だと考えて，床の縦の長さ，床の横の長さ，段差などを記録していた。このように，原問題の作り替えに必要なデータの取捨選択にあたり，A 班が台形の段差を長方形とみなして計測した活動と同様の活動を，どの班も行っていた。

さらに，すべての班が，各場所の縦と横の長さについて mm までは記録せず m や cm で記録し，複雑な形状の場所は図を用いて大まかに記録していた。例えば，I 班の生徒 O は，生徒玄関の床の大きさを調査した際，

図 10　傾斜がある渡り廊下の形状

図４の指示に下駄箱の両側の土足部分（図11矢印の部分）のデータを記録していた（図 12）。図 11 の２つの矢印で示したように，実際には土足部分の縦の長さは場所によって異なっていたが，図 12 には土足部分４カ所すべて 231cm と記録していた。

これらのことから，生徒は原問題を作り替えるために必要なデータを取捨選択し，m や cm までで考えたり，複雑な形状は大まかに捉えたりして，事象を理想化や単純化している。A 班や I 班のように，どの班も「日常的事象に立ち返る場面」の段階で，すでに数学化するための準備を自発的に行っていた。

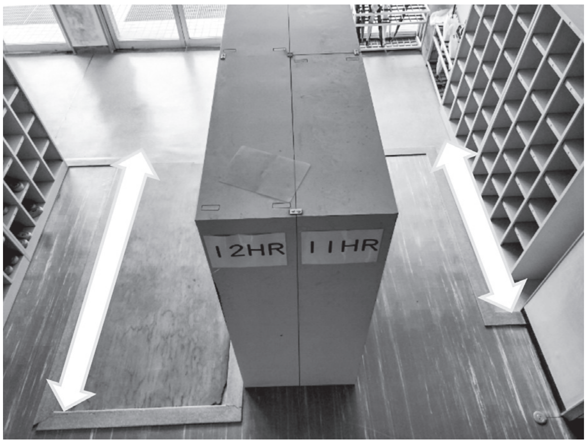


図 11　I 班がリフォームしたい場所の一部

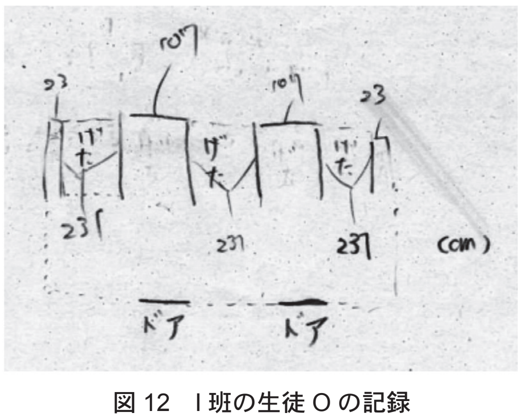


図 12　I 班の生徒 O の記録

数学化する場面

生徒にとって初めての数学化の活動であったにもかかわらず，表1からわかるように，B班を除く8班が原問題を作り替えることができていた。また5節で述べたように，B班も文章化はしていないものの，原問題の作り替えをしていることがわかっている。これらのことから，すべての班が数学化の取り組みに成功していたと判断した。一方，生徒が作った数学的問題の解法に着目すると，C班とD班を除く7班が，最大公約数または公約数を解法手段とする問題を作成した。また5節で述べたように，発表時にD班は解法手段を最大公約数に変更していた。これらのことから，C班を除く8班が，原問題の解法手段を参考にして数学化していたことがわかる。

それだけでなく，すべての班が，リフォームしたい場所のデータを収集した際，実際には凹凸や傾斜が存在しても，今回は凹凸がないものとして考えたり，傾斜を水平とみなして考えたり，縦と横の長さの数値を近い数値に変更したりして理想化や単純化したデータをもとに，原問題を作り替えていた。例えば，A班の問題（表1）をみると，「縦1,955cm横425cmの渡り廊下がある。ただし，入口と出口からそれぞれ170cmのところに20cmの段差がある。」としている。このように，図10の傾斜のある段差を，20cmの幅の段差とみなしている。縦と横の長さの数値も，筆頭者が授業後に実測した数値と異なっていて，数学の問題として計算しやすい数値に修正した可能性がある。A班の生徒Yは，図7の指示②で,「実際は，平面だけでなく，段差や欠けている部分のことも考えなくてはいけないので，複雑になるし，難しい。」と記述していた。このことから，原問題から「日常的事象に立ち返る場面」を経由して「数学化する場面」を設定することで，生徒が主体的に，事象を理想化や単純化したデータをもとにして，原問題を作り替えていたことが明らかである。

また，図4のワークシートの指示に対する記録や計算

表1　生徒が作った数学的問題と解法

班	図5の指示で検討した問題	解法手段
A班	縦1,955cm横425cmの渡り廊下がある。ただし，入口と出口からそれぞれ170cmのところに20cmの段差がある。1辺の長さ$a$cmの正方形のタイルを何枚か敷き詰めて，すき間がないようにしたい。段差にもタイルをはるものとする。タイルをできるだけ大きくするには，aの値をいくらにすればよいか。また，タイルは何枚必要になるか。aは整数 **（＊）発表時の問題は一部変更していた。**	最大公約数
B班	**（＊）文章化していなかったため，ワークシートの図や計算結果から解法を拾い出した。発表時の問題も，作成途中の状態であった。**	最大公約数
C班	縦45cm横1m55cmの壁と縦75cm横5m45cmの壁があります。その壁に，大小2種類の正方形のタイルを張り何枚かすき間がないように敷き詰めます。大きいタイルの1辺の長さは7cmです。また大きいタイルは900枚敷き詰めます。小さいタイルは何枚必要ですか。ただし，小さいタイルの1辺の長さは5cmとする。	割り算
D班	太郎君は力が強いので，タイルを買いに行くことになりました。矢田先生からこのようなメモを受け取りました。メモを見て，太郎君がタイルを何枚買えばよいか求めなさい。 メモ：タイル1辺9cm　壁の高さ2m97cm　横の長さ6m48cm　タイルの枚数？？？ **（＊）発表時の問題は一部変更し，解法も最大公約数になった。**	割り算
E班	阿波高校の渡り廊下の壁にタイルをはります。壁は縦　100cm　横　堀田君の両腕を広げた長さ8幅分より56cm短いです。 (1)　このとき壁の面積は12.8㎡でした。堀田君の身長を求めなさい。ただし，堀田君の腕の長さは身長と同じ長さです。 (2)　1辺$a$cmの正方形のタイルをはるとき，最も少ない枚数ではるためには何枚必要か	最大公約数
F班	縦3,528cm，横2,912cmの体育館の床に1辺の長さ$a$cmの正方形のタイルを何枚か敷き詰めてすき間がないようにしたい。タイルは500,000枚ある。1辺何cmのタイルを敷き詰めることができるかすべて答えよ。 **（＊）発表時の問題は一部変更していた。**	公約数
G班	縦16cm横1m20cmのトイレの壁に1辺の長さ$a$cmの正方形のタイルを何枚か敷き詰めて，すき間がないようにしたい。タイルをできるだけ大きくするには，aの値をいくらにすればよいか。ただしaは整数とする。	最大公約数
H班	縦90cm横492cmの長方形の壁に1辺の長さ$a$cmの正方形の白と黒のタイルを交互に何枚か敷き詰めて，すき間がないようにしたい。タイルをできるだけ大きくしたとき，aの値と白のタイルの枚数はいくらか。	最大公約数
I班	タイルの大きさが　縦：横＝1：2とする。 縦の長さをaとおく　図が（図13上の図）のときタイルの枚数を1番少なくするためには，縦何cm横何cmにすればよいか。	最大公約数

結果から，4班が収集したデータの数値を参考にしながらも，縦と横の長さの最大公約数を考慮したうえで，数値を変更していたことがわかった。例えば，I班の生徒Oは，「現実では長さがしっくりくるようなものになるほうが少ないことがわかった。僕たちが作った問題も縦の長さを230cmにしていたが，実際は231cmであった。このまま問題を解いていると縦231cm横260cmの最大公約数は1だったので答えが1cmと本当はなっていた。」と記述していた。このことから,「数学化する場面」で問題を作り替える際，生徒は最大公約数が1だけにならないように，数学の問題として成立することを意識していたことがわかる。

<u>数学的問題の解決と結果の解釈・検討場面</u>

作り替えた問題の解と各班が決めたリフォームしたい場所を照らし合わせた班がB班とI班である。B班はタイルの目地に，I班は求めたタイルの大きさに着目していた。どちらの班も，筆頭者が指示していないにもかかわらず，結果の解釈・検討をしていた。すでに述べたように，B班はタイルが張られているトイレの追加調査を行った。B班の生徒Tは，図7の指示②で,「簡単な問題でなく，後から追加すると，より難しい問題をつくることができる。問題をより現実的に考えると，むずかしい。」，B班の生徒Oも,「僕の班は最初，タイルをすき間なくうめようとしていたが，トイレのタイルはすき間があった。そして僕のみたことあるタイルもすき間があった。」と記述していた。このことから，B班は，原問題を作り替えて解を求めた後，解とタイルが張られている場所を照らし合わせ，自分たちの数学的問題はタイルの目地を考慮していないことに気づき，さらに問題を作り替えようとしていることがわかる。こうした修正を加えたことによって，作業時間が短くなり，その結果，問題の作成が途中で終わってしまったことが窺える。また，I班は，発表の際，解からわかったこととして,「タイル1枚の横の長さが20cmのときちゅうとはんぱになる。1 cm^2 のタイルをつかっておしゃれにしきつめましょう。」と述べた。I班の生徒Uは，図6の指示①で，作り替えた問題の解を求めるために，図13の上の図の斜線部分の4カ所の長さである23cm，107cm，107cm，23cmを，図13下の図では1つにまとめて横260cmの長方形にして計算し，その結果，縦10cm横20cmというタイルの大きさを求めたことを計算結果として残している。I班の生徒Oは，図7の指示②で,「現実的に考えると，タイルを切って曖昧なところをしきつめるのが簡単だと思う。問題にするときは，余った部分をうめるためにタイルをどのくらい切ればよいか？のような感じにしたほうが現実的で良いと思った。」と記述していた。このことから，I班は，原問題を作り替えて解を求めた後，解とリフォームしたい場所の記録（図13上図の斜線部分）を照らし合わせ，求めた解では記録した場所に当てはまらないことに気づいたことがわかる。さらに，その対処法と再度問題を作り替えるための方針を考えていたことがわかる。

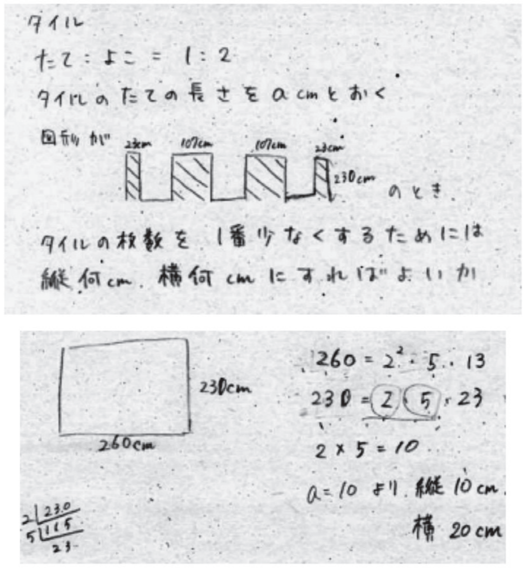


図13　I班の生徒Uの記述

7　本授業の考察

本授業を通して，3つの特徴的な生徒の反応が見られた。1つ目は，生徒が本時の課題を正確にとらえ，的確に，かつ主体的に達成しようとしたことである。本時の課題は，生徒がタイル職人になったつもりでタイルを張って校内をリフォームする際，数学を使って解決することだった。本授業は，原問題を起点にして，身近な学校のリフォームを想起させ，リフォームしたい場所のデータを収集した。しかも，収集したデータをもとに，原問題のような数学の問題を作り，解決するという，すでに学習したことを利用する活動だった。100分で解決するには大変な課題だったと思われるが，その課題が明確で，生徒にとって身近な題材だったことが，生徒の主体性を引き出した可能性がある。加えて，用いた既習の原問題が，最大公約数を求めるだけの容易な問題であったことも，生徒が課題に取り組みやすかった要因だと考えている。2つ目は，生徒がリフォームしたい場所を調査する際，台形でも長方形とみなしたり，厳密な数値を追求するのではなく，整数値に丸めてデータを収集したり，計算しやすい数値にさらに変更したりしたことである。生徒は「日常的事象に立ち返る場面」のデータを収集する時点で，すでに，単純な長方形とみなしたり，合同でない長方形でも合同とみなしたりする活動を，自ら行っていた。このことは，整数値以外を記録した班がいないこ

とからも窺える。問題を作り替える際，数学の問題として成立することを意識して，さらに数値を変更していた班もあった。生徒が「日常的事象に立ち返る場面」からすでに数値の理想化や単純化を自発的に行っていたことから，教科書の問題を起点にして，日常的事象に立ち返る授業展開は，生徒が主体的に数学的活動を行っていくきっかけになっていたと考えられる。3つ目は，作り替えた問題を，現実の場面に照らし合わせながら見直した班が2つ出現したことである。本授業では，数学的問題の結果と日常的事象を照らし合わせることを求めていなかったが，B班とI班は，実際のタイルの形や張り方に着目して，問題を作成していた。この2班は，問題の作り替えを2回行っていることもわかっている。自分たちの作った数学の問題を，より日常的事象に近いものにしようとすることが，このような活動を導出したと考えられる。そのきっかけは，「数学化する場面」で生徒Mの質問に応えて，筆頭者が現実のタイルの形や張り方を提示したことも要因ではないかと考えている。

以上の，生徒の特徴的な反応に対する3つの考察から，本時の目標である「日常生活や社会の事象から，数学的に表現した問題へ，数学化する資質・能力を育成する」部分については，おおむね達成できたと考えた。なお，3節で述べたように，生徒が数学化しやすくする機会を設けるために，筆者らが構想した「日常生活に立ち返る場面」は，生徒が原問題を参考にして数学化したり，日常的事象に立ち返って結果の解釈・検討したりする際に，大きな役割を果たしたと考えている。

一方で「数学的結果を解釈・検討する資質・能力を育成する」については，十分に達成できない結果になった。このことは，本授業で，結果の解釈・検討を強く強調しなかったことにも起因している可能性がある。そのため，「数学的問題の解決と結果の解釈・検討場面」で，生徒に作り替えた問題の数学的な結果と，リフォームしたい場所を照らし合わすように指示することも必要だと考えている。

本研究では，これまで行ってきた授業を改善するために，数学的活動を重視した授業として，教科書の問題を起点にして，日常生活の場面に立ち返って改めて問題を作成し，その問題を解決する*左側の過程*を取り入れた本授業を構想し，実践した。その結果，数学的活動の*左側の過程*を取り入れた授業を行えば，数学的活動に不慣れな生徒でも，主体的に活動することに気付かされた。本授業の事例だけで判断することは難しいが，今後，本授業のような指導事例を蓄積していくことによって，筆頭者の授業が改善されていくだけでなく，高等学校数学科の授業改善の一助になる可能性もある。筆頭者は，これまでの授業形態を変更することへの不安があったが，本授業での生徒の活動の様子を見る限り，積極的に授業改善していくべきだと，考えを改めなければいけないと気づかされた。また本授業を通して，教材研究をすること自体の楽しさを改めて感じることもできた。今後は，数学的活動の*左側の過程*を取り入れた授業を構想するだけでなく，*右側の過程*を取り入れた授業も実現したいと考えている。

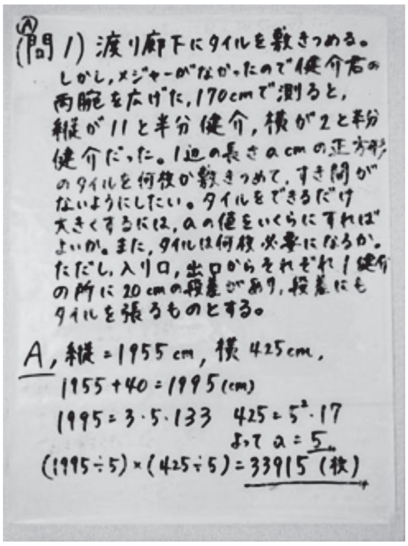
引用文献

文部科学省（2019）:高等学校学習指導要領（平成30年）解説数学編理数編，23，25，26.

清水美憲（編著）（2010）：授業を科学する，学文社，31.

数研出版編集部（編著）（2019）：改訂版短期完成整数の性質ノート，数研出版，9.

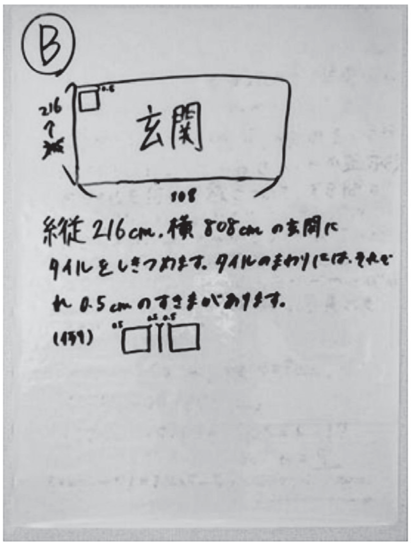
資料（各班が発表用に作成したシート）



問1）渡り廊下にタイルを敷きつめる。
しかし，メジャーがなかったので健介君の両腕を広げた，170cmで測ると，縦が11と半分健介，横が2と半分健介だった。1辺の長さ a cm の正方形のタイルを何枚か敷きつめて，すき間がないようにしたい。タイルをできるだけ大きくするには，a の値をいくらにすればよいか。また，タイルは何枚必要になるか。
ただし，入り口，出口からそれぞれ1健介の所に 20cm の段差があり，段差にもタイルを張るものとする。

A，縦 = 1955 cm，横 425cm，
1955 + 40 = 1995 (cm)
1995 = 3・5・133　425 = 5^2・17
よって a = 5.
(1995 ÷ 5) × (425 ÷ 5) = 33915（枚）

A班

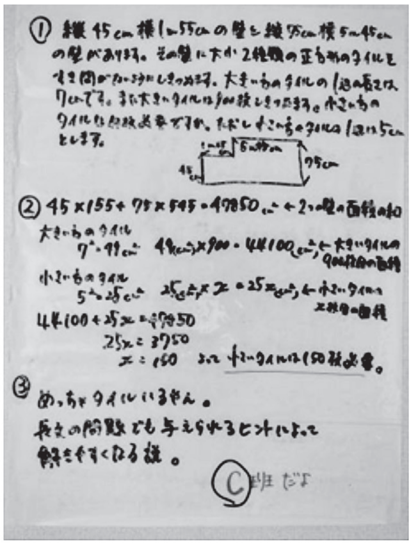


B

玄関

縦 216cm，横 808cm の玄関にタイルをしきつめます。タイルのまわりには，それぞれ 0.5cm のすきまがあります。

B班



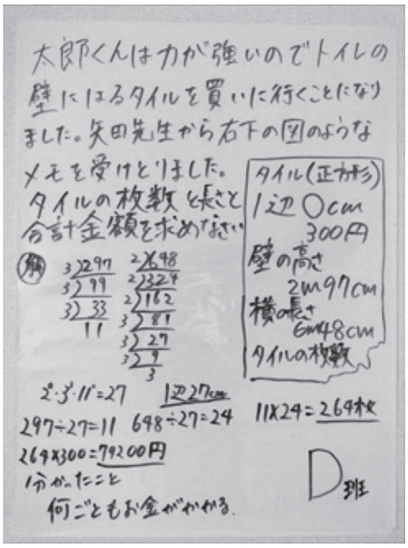
① 縦 45cm 横 155cm の壁と縦 75cm 横 545cm の壁があります。その壁に大小2種類の正方形のタイルをすき間がないようにしきつめます。大きい方のタイルの1辺の長さは 7cm です。また大きいタイルは 900 枚しきつめます。小さい方のタイルは何枚必要ですか。ただし小さい方のタイルの1辺は 5cm とします。

② 45 × 155 + 75 × 545 = 47850 ← 2つの壁の面積の和
大きい方のタイル
7・7 = 49　49 × 900 = 44100
小さい方のタイル
5・5 = 25　25 × x = 25x ← 小さいタイルの面積の和
44100 + 25x = 47850
25x = 3750
x = 150　よって小さいタイルは 150 枚必要。

③ めっちゃタイルいるやん。
長文の問題でも与えられるヒントによって解きやすくなる説。

C班だよ

C班



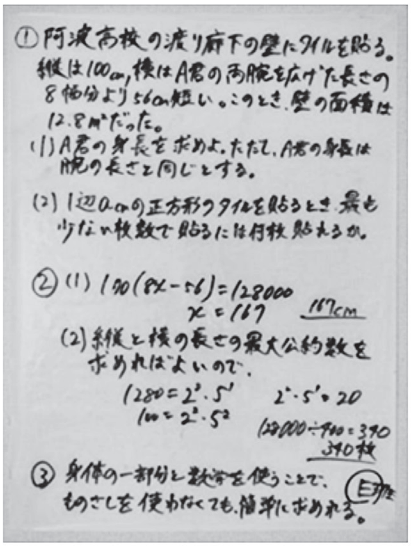
太郎くんは力が強いのでトイレの壁にはるタイルを買いに行くことになりました。矢田先生から右下の図のようなメモを受けとりました。
タイルの枚数と長さと合計金額を求めなさい。

タイル（正方形）
1辺 ○cm
300円
壁の高さ
2m97cm
横の長さ
6m48cm
タイルの枚数

（解）
$2^{\cdot}$・3^3・11 = 27　1辺27cm
297 ÷ 27 = 11　648 ÷ 27 = 24　11 × 24 = 264枚
264 × 300 = 79200円
分かったこと
何ごともお金がかかる。

D班

D班



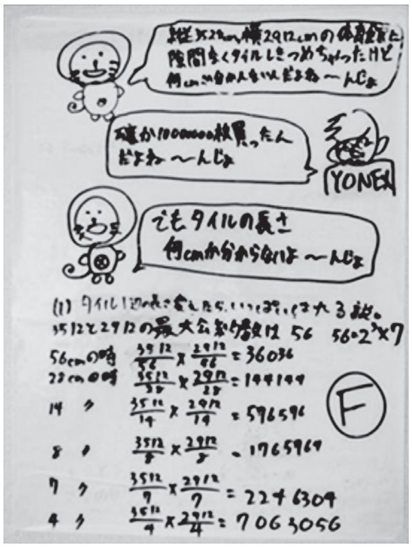
① 阿波高校の渡り廊下の壁にタイルを貼る。
縦は 100cm，横は A君の両腕を広げた長さの8個分より 56cm 短い。このとき，壁の面積は 12.8 ㎡ だった。
(1) A君の身長を求めよ。ただし，A君の身長は腕の長さと同じとする。
(2) 1辺 a cm の正方形のタイルを貼るとき，最も少ない枚数で貼るには何枚貼れるか。

② (1) 100(8x − 56) = 128000
x = 167　167cm
(2) 縦と横の長さの最大公約数を求めればよいので，
1280 = 2^8・5　100 = 2^2・5^2　2^2・5 = 20
128000 ÷ 400 = 320　320枚

③ 身体の一部分と数学を使うことで，ものさしを使わなくても，簡単に求めれる。

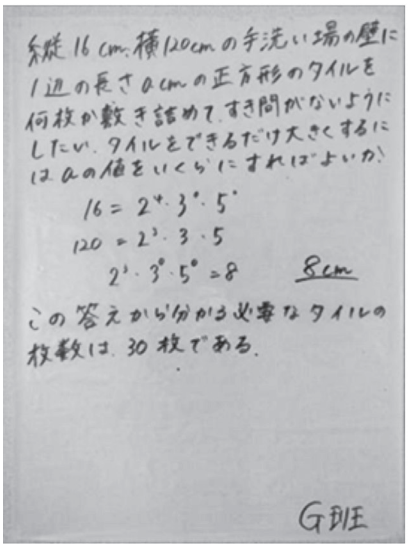
E班

E班



(1) タイル1辺の長さを変えたらいくつ入るか。
3512 と 2912 の最大公約数は 56　56 = 2^3 × 7
F

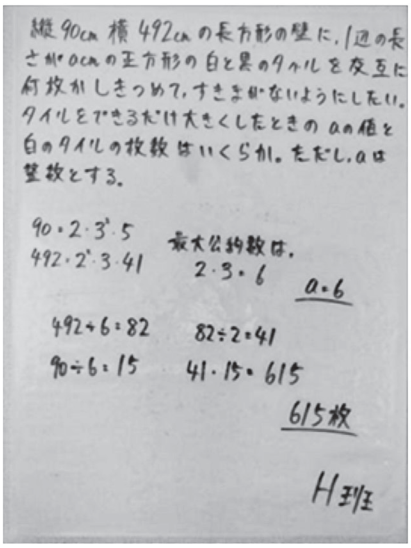
F班



縦 16 cm，横 120cm の手洗い場の壁に1辺の長さ a cm の正方形のタイルを何枚か敷き詰めて，すき間がないようにしたい。タイルをできるだけ大きくするにはaの値をいくらにすればよいか。
16 = 2^4・3^0・5^0
120 = 2^3・3・5
2^3・3^0・5^0 = 8　8cm
この答えから分かる必要なタイルの枚数は 30 枚である。

G班

G班

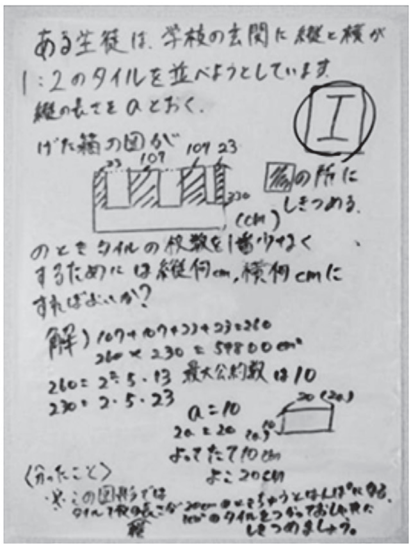


縦 90cm 横 492cm の長方形の壁に，1辺の長さが a cm の正方形の白と黒のタイルを交互に何枚かしきつめて，すきまがないようにしたい。タイルをできるだけ大きくしたときの a の値と白のタイルの枚数はいくらか。ただし，a は整数とする。

90 = 2・3^2・5
492 = 2^2・3・41
最大公約数は，2・3 = 6
a = 6
492 ÷ 6 = 82　82 ÷ 2 = 41
90 ÷ 6 = 15　41・15 = 615
615枚

H班

H班



ある生徒は，学校の玄関に縦と横が 1：2 のタイルを並べようとしています。
縦の長さを a とおく。
げた箱の図が
の所にしきつめる。
このときタイルの枚数を1番少なくするためには縦何cm，横何cmにすればよいか？
解）107 + 107 + 23 + 23 = 260
260 × 230 = 59800 ㎠
260 = 2^2・5・13　最大公約数は 10
230 = 2・5・23
a = 10
よって たて 10cm
よこ 20cm
〈分かったこと〉

I班